

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора), акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

29-й ГОД ИЗДАНИЯ

1961

ТОМ 138, № 3

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

Э. Л. Аким и А. А. Левин. Производящая функция для коэффициентов Клебша — Гордана	503
И. Я. Бакельман. Обобщенные чебышевские сети и многообразия ограниченной кривизны	506
Ю. Н. Благовещенский и М. И. Фрейдлин. Некоторые свойства диффузионных процессов, зависящих от параметра	508
М. С. Бродский. Критерий одноклеточности вольтерровых операторов	512
В. Н. Буров. Об аппроксимации функций полиномами, удовлетворяющими нелинейным связям	515
М. И. Вишик. Краевые задачи для квазилинейных сильно эллиптических систем уравнений, имеющих дивергентную форму	518
Е. Г. Дьяконов. Об одном итерационном способе решения систем конечно-разностных уравнений	522
И. И. Ибрагимов и Р. Г. Мамедов. Некоторые неравенства для полиномов комплексного переменного	526
Д. Л. Келенджеридзе. К теории оптимального преследования	529
Э. И. Крупицкий. Об одном классе полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на двух интервалах.	533
И. М. Мельник. О краевой задаче Гильберта	537
С. Г. Михлин. Сингулярные интегральные уравнения в классах липшицевых функций	541
А. М. Олевский. Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам	545
Л. И. Ронкин. Об общем виде функционала в пространстве функций, аналитических в полукруговой области	549
Димитър Скордев. О некоторых полуупорядоченных пространствах	553
П. Л. Ульянов. Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам	556
Чэнь Се-чан. О полноте системы функций $\{z^{\tau_n} \log^j z\}$ на кривых и в областях комплексной плоскости	560

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. Фаддеев. Строение резольвенты операторов Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием	565
Д. В. Шарикадзе. Об одной нестационарной задаче магнитной гидродинамики	568

Т. В. Иванова, П. И. Кудряшов и Б. Я. Свешников. О длительности ультрафиолетовой флуоресценции некоторых ароматических соединений . . .	572
Л. М. Лямшев. О некоторых интегральных соотношениях в акустике движущейся среды	575
М. М. Макаров и Н. А. Перфилов. О фрагментации на легких ядрах	579
Л. И. Рудаков и Р. З. Сагдеев. О неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле	581

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Л. Покровский. Общий метод отыскания оптимальных распределений для линейных антенн	584
---	-----

ГЕОФИЗИКА

Л. Н. Гутман и Л. Н. Малько. К теории фронтов	587
---	-----

ХИМИЯ

А. А. Ахрем и А. И. Кузнецова. Применение тонкослойной хроматографии для разделения стероидных соединений	591
А. А. Баландин, О. К. Богданова и И. П. Беломестных. Кинетика дегидрогенизации этилбензола в стирол.	595
Э. М. Брайнина, М. Х. Миначева, Р. Х. Фрейдлина и А. Н. Несмеянов. Ацилоксипроизводные кобальта, никеля и марганца	598
А. М. Голуб и В. В. Скопенко. Селеноцианатные комплексы серебра катионного типа	601
Е. А. Ипполитова и Л. М. Ковба. О составе и свойствах уранатов	605

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Л. Г. Ганиченко и В. Ф. Киселев. Исследование свойств поверхности кристаллической двуокиси титана	608
Н. С. Гарфьянов. О сверхтонкой структуре линии э.п.р. в водных растворах солей V^{2+}	612
А. В. Ермолина, Л. А. Игонин, Л. А. Носова, И. И. Фарберова и К. Н. Власова. К вопросу о связи механических свойств кристаллических полимеров с их надмолекулярными структурами	614
Н. Н. Кавтарадзе и В. И. Лыгин. Строение поверхностных соединений окиси углерода на палладии по данным адсорбционных измерений и инфракрасных спектров	616
В. Н. Соколов, И. Я. Поддубный, В. В. Перекалин и В. Ф. Евдокимов. Полимеризация нитроэтилена под действием γ -излучения	619
В. М. Татевский, В. П. Спиридонов и П. А. Акишин. Об одной закономерности в межатомных расстояниях молекул галогенидов разных групп периодической системы элементов	621

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Г. И. Кутянин и К. Г. Каримов. Зависимость между износостойкостью и термостойкостью кожи	625
В. И. Просвирий и Л. Я. Несговоров. Коррозионное разрушение нагретого железа в потоке холодного воздуха больших скоростей	628

ГЕОЛОГИЯ

Л. М. Варюхина. Споры и пыльца триасовых отложений юга Печорского бассейна	631
Р. З. Генкина. Мезозойская флора Южно-Якутского (Алданского) каменноугольного бассейна и ее стратиграфическое распространение	635
И. С. Красивская. О соотношении силурийских и подстилающих их отложений на Северном Кавказе	639
В. А. Кузнецов. О возрасте вулканогенно-осадочных толщ юго-западного крыла Холзунско-Чуйского антиклинория Рудного Алтая	643
Н. А. Лебедева и Г. И. Попов. Новые данные о верхнем плиоцене Кубани	647
Р. Х. Липман. Состав микрофауны нуммулитовых слоев мыса Изенды-Арал на северном берегу Аральского моря	651
А. Д. Миклухо-Маклай. Некоторые девонские водоросли Средней Азии и других областей СССР и их породообразующее и палеогеографическое значение	655
И. М. Хорева и Р. Е. Гитерман. Новые данные о расчленении третичных отложений в нижнем течении Алдана	659

- К. В. Филатов. Силикатные воды и их место в горизонтальной гидрохимической зональности 663

МИНЕРАЛОГИЯ

- Н. И. Мязь. К вопросу о процессе перекристаллизации в хрусталеносных кварцевых жилах 667

ПЕТРОГРАФИЯ

- В. А. Жариков. Кварцево-полевошпатовые метасоматиты в скарновых месторождениях 671

ГЕОХИМИЯ

- Д. С. Николаев, К. Ф. Лазарев и С. М. Гращенко. Концентрация изотопов тория в водах Азовского моря 674

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

- В. П. Маслов. Не являются ли сицидии и хованеллы утрикулами харофитов? 677

ЦИТОЛОГИЯ

- Н. Б. Христолюбова. Контролируемое изменение физиологической активности определенных участков гигантских хромосом слюнных желез дрозофилы в результате воздействия версеном 681

ГИСТОЛОГИЯ

- Г. В. Овсянников. Морфофизиологические изменения некоторых областей кожи полового аппарата барана в связи с возрастом и кастрацией 683

БИСФИЗИКА

- О. Г. Миронов. К вопросу о радиоактивности некоторых высших водорослей в районе Феодосии. 686
А. А. Прокофьева-Бельговская. Функция теломерных участков хромосом в эмбриональных митозах 688

БИОХИМИЯ

- Н. А. Киселев, Л. П. Гаврилова и А. С. Спирин. О конфигурациях макромолекул высокополимерной рибонуклеиновой кислоты по данным электронной микроскопии 692
Е. Л. Розенфельд и И. С. Лукомская. О специфичности поли- и олигоглюкозидаз 695

ЭКОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- И. Г. Зоз и Н. А. Черных. К биологии *Eriosynaphe longifolia* (Fisch.) DC 699

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- Н. Г. Доман, А. К. Романова и З. А. Терентьева. Превращение некоторых летучих органических веществ, поглощенных листьями из атмосферы 702

КСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

- Л. Б. Берлин и М. М. Нездатный. Гистологические процессы при гомотрансплантации консервированной кожи кролика 706
А. А. Войткевич. Гипоталамическая регуляция промежуточной доли гипофиза 710
Л. В. Полежаев, Л. В. Ахабадзе, Н. А. Захарова и М. П. Явич. Регенерация мышц сердца под влиянием пирогенала и гидролизата миокарда 714

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОРФОЛОГИЯ

- Е. В. Чулицкая. Латентная дифференцировка материала слухового пузырька у осетра и севрюги 718

ФИЗИОЛОГИЯ

- С. М. Верещагин, И. А. Сытинский и В. П. Тыщенко. Действие бета-окси-гамма-аминомасляной кислоты на биоэлектрическую активность ганглиев изолированной нервной цепочки чешуекрылых. 722
А. В. Зевеке. Исследование механорецепции легких методом антидромного подавления афферентных сигналов 725
В. А. Ильянок. Об активирующем влиянии непрерывного света на последующее воспроизведение мозгом человека ритма световых мельканий 729
Х. С. Коштойац. Нукленновые кислоты и проведение ритмического возбуждения в сердце 733

CONTENTS

MATHEMATICS	Pages
E. L. Akim, A. A. Levin. Generating function for Klebsch — Gordan's coefficients	503
I. J. Bakel'man. Generalized Chebyshev's nets and manifolds of bounded curvature	506
Iu. N. Blagoveshchenskii, M. I. Freidlin. Some properties of diffusion processes depending on a constant	508
M. S. Brodskii. Test for the unicellularity of Volterra operators	512
V. N. Burov. Approximation of functions by polynomials satisfying non-linear relations	515
M. I. Vishik. Boundary value problems for quasilinear strongly elliptic simultaneous equations having a divergent form	518
E. G. Diakonov. An iteration method of solving simultaneous equations of finite differences	522
I. I. Ibragimov, R. G. Mamedov. Some inequalities for polynomials in a complex variable	526
D. L. Kelendzheridze. On the theory of optimal follow-up scheme	529
E. I. Krupitskii. On a certain class of polynomials, least diverging from zero on two intervals	533
I. M. Mel'nik. On Hilbert's boundary value problem	537
S. G. Mikhlin. Singular integral equations in the classes of Lipschitz's functions	541
A. M. Olevskii. Divergent series from L^2 over complete systems	545
L. I. Ronkin. The general form of a functional in the space of functions analytic in a semicircular domain	549
Dimitr Scordev. Some semiordered spaces.	553
P. L. Ulianov. Divergent series over Haar's system and over bases	556
Chen Se-chan. On the completeness of systems of functions $\{z^{\tau n} \log^j z\}$ over curves and in regions of the complex plane	560
MATHEMATICAL PHYSICS	
L. D. Faddeev. The structure of the resolvent of Schrodinger's operator for a system of three particles interacting in pairs	565
D. V. Sharikadze. An unsteady flow problem in magnetic hydrodynamics	568
PHYSICS	
T. V. Ivanova, P. I. Kudriashov, B. J. Sveshnikov. The duration of the ultra-violet fluorescence from some aromatic compounds	572
L. M. Limashev. Some integral relations in the acoustics of a moving medium	575
M. M. Makarov, N. A. Perfilov. Fragmentation on light nuclei	579
L. I. Rudakov, R. Z. Sagdeev. Instability of homogeneous attenuated plasma in a strong magnetic field	581
TECHNICAL PHYSICS	
V. L. Pokrovskii. A general method of finding optimum distributions for line antennas	584
GEOPHYSICS	
L. N. Gutman, L. N. Mal'ko. On theory of fronts	587
CHEMISTRY	
A. A. Akhrem, A. I. Kuznetsova. The use of thin-layer chromatography for the separation of steroid compounds.	591
A. A. Balandin, O. K. Bogdanova, I. P. Belomestnykh. The kinetics of ethyl benzene dehydrogenation to styrene	595
E. M. Brainina, M. Kh. Minacheva, R. Kh. Freidlina, A. N. Nesmeyanov. Acyloxyderivatives of cobalt, nickel and manganese	598
A. M. Golub, V. V. Skopenko. Selenocyanate complexes of cation silver	601
E. A. Ippolitova, L. M. Kovba. Composition and properties of uranates	605

L. G. Ganichenko, V. F. Kiselev. An investigation of the surface of titanium dioxide crystals 608

N. S. Garifianov. The superfine structure of the electron paramagnetic resonance line in aqueous solutions of V²⁺ salts 612

A. V. Ermolina, L. A. Igonin, L. A. Nosova, I. I. Farberova, K. N. Vlasova. On the relation between the mechanical properties of crystalline polymers and their supermolecular structures 614

N. N. Kavtaradze, V. I. Lygin. The structure of surface compounds of carbon monoxide on palladium from the evidence obtained by adsorption measurements and infrared spectra 616

V. N. Sokolov, I. J. Poddubnii, V. V. Perekalin, V. F. Evdokimov. Polymerization of nitroethylene by γ -rays. 619

V. M. Tatevskii, V. P. Spiridonov, P. A. Akishin. A law observed in the interatomic distances of halogenide molecules for different groups of the periodic system 621

CHEMICAL TECHNOLOGY

G. I. Kutianin, K. G. Karimov. The resistance of leather to wear, as related to its resistance to heat 625

V. I. Prosvirin, L. J. Nesgovorov. Corrosive destruction of heated iron in a high-speed flow of cold air 628

GEOLOGY

L. M. Variukhina. Spores and pollen in Triassic deposits of the South of the Pechora basin 631

R. Z. Genkina. The Mesozoic flora of the South-Yakutian (Aldanian) carboniferous basin, and its stratigraphic distribution 635

I. S. Krasivskaia. On the relation existing between the Silurian deposits of North Caucasus, and the subjacent deposits 639

V. A. Kuznetsov. On the age of volcanogenic sedimentary strata of the South-East limb of the Kholzusk-Chuysk anticlinorium of the Metalliferous Altai 643

N. A. Lebedeva, G. I. Popov. Recent data on the Upper Pliocene of the Kuban 647

R. Kh. Lipman. Microfauna composition of nummulitic layers of cape Izendy-Aral on the northern littoral of the Aralsk Sea 651

A. D. Miklukho-Maklai. Certain Devonian algae of Central Asia and other regions of the USSR, and their rock-forming and paleogeographic importance 655

I. M. Khoreva, R. E. Giterman. Recent data on the dismembering of tertiary deposits in the lower reaches of the Adlan river 659

HYDROGEOLOGY

K. V. Filatov. Silicate waters, and their place in the horizontal hydrochemical zonality 663

MINERALOGY

N. I. Miaz. On the process of recrystallization in crystal-bearing quartz-reefs 667

PETROGRAPHY

V. A. Zharikov. Quartzofeldspathic metasomatites in skarn deposits 671

GEOCHEMISTRY

D. S. Nikolaev, K. F. Lazarev, S. M. Grashchenko. The concentration of thorium isotopes in the waters of the Azov Sea 674

PALEONTOLOGY

V. P. Maslov. Are sycidium and chovanella not the utricules of charophytes? 677

CYTOLOGY

N. B. Khristoliubova. Controlled variation in the physiological activity of certain sections of giant chromosomes of salivary glands in Drosophila, called forth by versene 681

HISTOLOGY

G. V. Ovsyannikov. Morphological changes in certain skin areas of the sex apparatus of rams, in connection with age and castration 683

501

BIOPHYSICS

- O. G. Mironov. A contribution to the problem of the radioactivity of certain higher algae within the region of Theodosia 686
- A. A. Prokofieva-Bel'govskaia. The functions of telomeric sections of chromosomes in embryo mitoses 688

BIOCHEMISTRY

- N. A. Kiselev, L. P. Gavrilova, A. S. Spirin. On configurations of macromolecular high-polymeric ribonucleic acid, from data of electron microscopy . . . 692
- E. L. Rosenfeld, I. S. Lukomskaia. On the specificity of poly- and oligoglucosidase 695

PLANT ECOLOGY

- I. G. Zoz, N. A. Chernykh. A contribution to the biology of *Eriosynaphe longifolia* (Fisch.) DC 699

PLANT PHYSIOLOGY

- N. G. Doman, A. K. Romanova, Z. A. Ierentieva. The transformation of certain volatile organic substances absorbed by leaves from the atmosphere 702

EXPERIMENTAL MORPHOLOGY

- L. B. Berlin, M. M. Nezdatny. Histological processes accompanying homotransplantation of preserved skin of rabbit 706
- A. A. Voitkevich. Hypothalamic control of the intermediary lobe of pituitary body 710
- L. V. Polezhaev, L. V. Akhabadze, N. A. Zakharova, M. P. Yavich. Cardiac muscle regeneration occurring under the influence of pyrogenal and myocardium hydrolysate 714

EVOLUTIONAL MORPHOLOGY

- E. V. Chulitskaia. Latent differentiation of the auditory vesicle material in *Acipenser Güldenstaedtii* and *A. stellatus* 718

PHYSIOLOGY

- S. M. Vereshchagin, I. A. Sytinskii, V. P. Tyshchenko. The effect of β -oxi- γ -aminobutyric acid on the bioelectric activity of ganglia of an isolated nerve chain in *Lepidoptera* 722
- A. V. Zeveke. Pulmonary mechanoreception studied by the method of antidromic inhibition of afferent signals. 725
- V. A. Il'ianok. The activating effect of continuous illumination on the subsequent reproduction by human brain of the rhythm of light scintillations . 729
- Chr. S. Koshtoiantz. Nucleic acids, and the conduction of rhythmical stimulation to the heart 733

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей статье (С. Н. Слугин. «Частично упорядоченные топологические группы»), опубликованной в ДАН, т. 136, №1, 1961 г., на стр 36 определение 3 следует читать: Если КТ-группа X является К-группой, то X назовем (о)-полной КТ-группой. В связи с этим отпадают замечания, помещенные между определениями 3 и 4.

С.Н. Слугин

Т-05286 Подписано к печати 13/V-1961 г. Тираж 5385 экз. Зак. 1695
 Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 20,55+7 вклеек. Бум. л. 7¹/₂. Уч.-изд. л. 21,4

2-я типография Издательства АН СССР, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

Э. Л. АКИМ и А. А. ЛЕВИН

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 I 1961)

В настоящей заметке строится производящая функция для коэффициентов Клебша — Гордана, что позволяет применять при изучении этих коэффициентов методы, аналогичные употребляемым в теории специальных функций.

Коэффициенты Клебша — Гордана $C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm)$ ⁽¹⁾ обычно определяются как коэффициенты в разложении

$$g_m^l = \sum_{m_1+m_2=m} C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm) e_{m_1}^{l_1} f_{m_2}^{l_2}, \quad (1)$$

где g_m^l ($|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2$) — векторы канонических базисов ⁽²⁾ в пространстве кронекеровского произведения двух неприводимых представлений весов l_1 и l_2 группы трехмерных вращений; $e_{m_1}^{l_1}$ и $f_{m_2}^{l_2}$ ($-l_1 \leq m_1 \leq l_1$, $-l_2 \leq m_2 \leq l_2$) — канонические базисы кронекеровских «сомножителей».

При реализации неприводимых представлений в пространствах многочленов $p(z_1)$ и $p(z_2)$ степеней не выше соответственно $2l_1$ и $2l_2$ операторами

$$T_\Phi p(z) = e^{-i\Phi} p(e^{i\Phi} z),$$

$$T_\Phi p(z) = \left(iz \sin \frac{\Phi}{2} + \cos \frac{\Phi}{2} \right)^{2l} p \left(\frac{z \cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2}}{iz \sin \frac{\Phi}{2} + \cos \frac{\Phi}{2}} \right),$$

причем канонические базисы представлений имеют вид

$$e_{m_1}^{l_1} = n_{m_1}^{l_1} z_{m_1}^{l_1-m_1}, \quad f_{m_2}^{l_2} = n_{m_2}^{l_2} z_{m_2}^{l_2-m_2}, \quad n_m^l = \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}, \quad (2)$$

Φ , ϑ — эйлеровы углы, кронекеровское произведение задается в пространстве многочленов $p(z_1, z_2)$ от двух переменных степеней не выше $2l_1$ по первой и $2l_2$ по второй переменной.

Это кронекеровское произведение распадается в прямую сумму неприводимых представлений. Многочлены p_m^l , служащие каноническими базами названных представлений, могут быть найдены с помощью инфинитезимальных операторов H_- , H_+ , H_3 ⁽³⁾:

$$H_- = z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} - 2(l_1 z_1 + l_2 z_2),$$

$$H_+ = -\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad H_3 = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + (l_1 + l_2).$$

Учитывая, наряду с (2), действие инфинитезимальных операторов на векторы канонического базиса: $H_- p_m^l = \alpha_m^{l-1} p_{m-1}^l$, $H_+ p_m^l = \alpha_{m+1}^l p_{m+1}^l$, $H_3 p_m^l = m p_m^l$, $\alpha_m^l = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$, многочлены $p_m^l(z_1, z_2)$ можно

представить в виде

$$p_m^l(z_1, z_2) = 2^{-(l_1+l_2)} z_1^{\frac{l_1-l_2-m}{2}} z_2^{\frac{l_2-l_1-m}{2}} q_m^l(\mu), \quad \mu = \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2},$$

где $q_m^l(\mu)$ удовлетворяет известному рекуррентному соотношению

$$\sqrt{1-\mu^2} \frac{dq_m^l(\mu)}{d\mu} + \frac{m\mu - (l_2-l_1)}{\sqrt{1-\mu^2}} q_m^l = -i\alpha_{m+1}^l q_{m+1}^l$$

между «обобщенными сферическими функциями» $P_{mn}(\mu)$ (2).

Отсюда, так как $q_m^l(\mu)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией $P_{-l, l_2-l}^l(\mu)$,

$$p_m^l(z_1, z_2) = (-1)^{l-m} a_l z_1^{\frac{l_1-l_2-m}{2}} z_2^{\frac{l_2-l_1-m}{2}} P_{l_2-l, m}^l\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right), \quad (3)$$

$$a_l = \sqrt{\frac{2l+1}{(l_1+l_2-l)!(l_1+l_2+l+1)!}}.$$

Подставляя в (1) $e_{m_1}^{l_1}$, $f_{m_2}^{l_2}$ из (2) и $g_m^l = p_m^l$ из (3), получим после сокращения на $z_1^{l_1+l_2-m}$ разложение

$$\begin{aligned} & (-1)^{l-m} a_l t^{\frac{l_2-l_1-m}{2}} (1-t)^{l_1+l_2} P_{l_2-l, m}^l\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \\ & = \sum_{m_1+m_2=m} C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm) n_{m_1}^{l_1} n_{m_2}^{l_2} t^{l_2-m_2}, \quad t = \frac{z_2}{z_1}, \end{aligned}$$

левую часть которого можно рассматривать как «производящую функцию» для коэффициентов Клебша — Гордана. Последнюю можно записать и в других видах, например через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned} & (-1)^{l-m} a_l \frac{1}{(m+l_1-l_2)!} \sqrt{\frac{(l+l_1-l_2)!(l+m)!}{(l+l_2-l_1)!(l-m)!}} (1-t)^{l_1+l_2-l} \times \\ & \times F(m-l, l_1-l_2-l, l_1-l_2+m+1, t) = \\ & = \sum_{m_1+m_2=m} C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm) n_{m_1}^{l_1} n_{m_2}^{l_2} t^{l_2-m_2} \end{aligned}$$

при $l_2 - l_1 \leq m \leq l$ и сходное выражение для $-l \leq m \leq l_2 - l_1$.

Используя производящую функцию и свойство унитарности матрицы $\|C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm)\|$, нетрудно написать коэффициенты Клебша — Гордана в формах, аналогичных форме Родрига и интегральному представлению специальных функций:

$$\begin{aligned} C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm) &= (-1)^{l-m} a_l [n_{m_1}^{l_1} n_{m_2}^{l_2} (l_2 - m_2)! (m + l_1 - l_2)!]^{-1} \times \\ & \times \sqrt{\frac{(l+l_1-l_2)!(l+m)!}{(l+l_2-l_1)!(l-m)!}} \times \\ & \times \left\{ \frac{d^{l_2-m_2}}{dt^{l_2-m_2}} (1-t)^{l_1+l_2-l} F(m-l, l_1-l_2-l, l_1-l_2+m+1, t) \right\}_{t=0}, \\ C(l_1 l_2 m_1 m_2 | ml) &= (-1)^{l-m} i^{l_1+l_2+m_1-m_2} 2^{-(l_1+l_2)} \frac{(2l+1) n_{m_1}^{l_1} n_{m_2}^{l_2}}{a_l} \times \\ & \times \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^{\frac{l_1+l_2}{2}} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{m_1-m_2}{2}} \bar{P}_{l_1-l_2, m}^l(\mu) d\mu, \end{aligned}$$

а также получить для них обычно употребляемую сумму Вигнера ⁽¹⁾ и различные свойства как известные, так и новые. Последние выводятся просто путем использования свойств гипергеометрических и обобщенных сферических функций.

В качестве примера укажем интересное асимптотическое выражение коэффициентов Клебша — Гордана

$$C(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm) \approx (-1)^{l_1+l_2-l} \frac{(l+m+1)^{l_2-m_2}}{(l-l_2-m_1)!} \times \\ \times \sqrt{\frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!(l+m)!(l-m)!(l_1-m_1)!(l_2+m_2)!}{(l+l_2-l_1)!(l_1+l_2-l)!(l_1+l_2+l+1)!(l_1+m_1)!(l_2-m_2)!}},$$

справедливое при $l_1, l_2, l, m \gg l_1 + l_2 - m$.

Поступило
13 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ E. P. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, N. Y.—London, 1959. ² И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро, УМН, 10, в. 3 (1955). ³ М. А. Неймарк, УМН, 9, в. 4 (1954).

И. Я. БАКЕЛЬМАН

ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИЕ СЕТИ И МНОГООБРАЗИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 I 1961)¹

1. На плоскости переменных $\{u, v\}$ рассмотрим квадрат $D \{0 < u < a, 0 < v < a\}$. Пусть $\alpha(u)$, $\beta(v)$ — функции ограниченной вариации, непрерывные слева на промежутке $[0, a)$, а $\mu(M)$ — вполне аддитивная функция борелевских множеств из квадрата D , имеющая ограниченную вариацию. Обозначим через Q_{u_0, v_0} прямоугольник $0 < u < u_0, 0 < v < v_0$.

Функцию $f(u, v)$, заданную в квадрате D , будем называть функцией ограниченной вариации, если она допускает представление

$$f(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) + \mu(Q_{u, v}),$$

где свойства функций $\alpha(u)$, $\beta(v)$, $\mu(Q_{u, v})$ описаны выше.

Мы будем говорить, что некоторая функция ограниченной вариации $f(u, v)$ порождает в квадрате D обобщенный чебышевский линейный элемент

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos f(u, v) du dv + dv^2, \quad (1)$$

если функция $f(u, v)$ допускает представление

$$f(u, v) = -A + \alpha(u) + \beta(v) + \mu(Q_{u, v}),$$

где: 1) $0 < A = \alpha(0) = \beta(0) < \pi$; 2) $0 < \alpha(u) < \pi, 0 < \beta(v) < \pi$ при $0 \leq u < a, 0 \leq v < a$; 3) при всех $(u, v) \in D$ имеем $0 < f(u, v) < \pi$.

Если рассматривать двухмерное риманово многообразие, на котором введена чебышевская координатная сеть, то в этой сети линейный элемент многообразия имеет вид (1), причем $f(u, v)$ по крайней мере дважды непрерывно дифференцируема: $f(u, v)$ есть, очевидно, угол между координатными линиями в точке многообразия с координатами (u, v) . Геометрический смысл величин $A, \alpha(u), \beta(v), \mu(Q_{u, v})$ таков:

$$A = f(0, 0), \quad \alpha(u) = f(u, 0), \quad \beta = f(0, v),$$

$$\mu(Q_{u, v}) = \int_0^u \int_0^v K(u, v) d\sigma,$$

где $K(u, v)$ — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади рассматриваемого многообразия. Очевидно, что функции $\alpha(u)$, $\beta(v)$, $\mu(Q_{u, v})$, $f(u, v)$ в этом случае удовлетворяют условиям 1) — 3).

2. Кривую L в D будем называть гладкой, если существует такая ее параметризация $u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b$, что $u(t), v(t) \in C^1$ и всюду на $[a, b]$ $u'^2 + v'^2 \neq 0$.

Теорема 1. Пусть в D определен обобщенный чебышевский линейный элемент. Тогда вдоль всякой гладкой кривой L функция $\sqrt{u'^2(t) + 2\cos f(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + v'^2(t)}$ суммируема на $[a, b]$.

Определим длину кривой L относительно рассматриваемого обобщенного чебышевского линейного элемента формулой

$$s_f(L) = \int_a^b \sqrt{u'^2 + 2\cos f(u, v)u'v' + v'^2} dt.$$

Пусть A и B — две точки квадрата D . Положим

$$\rho_f(A, B) = \inf s_f(L), \quad (2)$$

где точная нижняя граница берется по всем гладким кривым $L \subset D$ с концами в точках A и B . Функция пары точек $\rho_f(A, B)$ удовлетворяет, как нетрудно видеть, аксиомам метрического пространства. Кроме того, эта метрика, очевидно, внутренняя.

В дальнейшем мы будем говорить, что обобщенный чебышевский линейный элемент (1) порождает внутреннюю метрику (2)*.

Таким образом, на квадрате D с помощью метрики (2) обобщенный чебышевский линейный элемент порождает некоторое двумерное метрическое многообразие, которое мы будем обозначать D_f .

Теорема 2. Пусть в D задан обобщенный чебышевский линейный элемент (1). Тогда многообразие D_f , порождаемое этим элементом, представляет собой многообразие ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова (см. (1)); при этом функция множеств $\mu(M)$ совпадает с внутренней интегральной кривизной этого многообразия.

3. Теорема 2 допускает обращение в следующем смысле:

Теорема 3. Пусть R — многообразие ограниченной кривизны и $G \subset R$ — область, гомеоморфная квадрату D , причем $\omega^+(G) < \pi/2$; $\omega^-(G) < \pi/2$ (ω^+ и ω^- — положительные и отрицательные части внутренней интегральной кривизны многообразия R). Тогда в G можно ввести сеть координат с обобщенным чебышевским линейным элементом (1), который порождает метрическое многообразие G_f , изометричное области G . При этом можно считать, что $A = \pi/2$.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступило
4 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Д. Александров, ДАН, 60, № 9 (1948).

* Согласно А. Д. Александрову (1), метрика $\rho_f(A, B)$ называется внутренней, если $\rho_f(A, B) = \inf s(L)$ по всем гладким кривым L в D с концами A и B , где длина кривой $s(L)$ определяется как точная верхняя граница сумм $\sum_{i=0}^{n-1} \rho_f(X_i, X_{i+1})$; $A = X_0, X_1, \dots, X_n = B$ — система последовательных точек на кривой L .

Ю. Н. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ и М. И. ФРЕЙДЛИН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 I 1961)

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\begin{aligned} x_t(\alpha, \omega) - x_s(\alpha, \omega) = \\ = \int_s^t \sigma(u, \alpha, x_u(\alpha, \omega)) d\xi_u(\omega) + \int_s^t m(u, \alpha, x_u(\alpha, \omega)) du. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнении (1) $\xi_u(\omega) = (\xi_u^1(\omega), \xi_u^2(\omega), \dots, \xi_u^n(\omega))$ — n -мерный винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$; $\sigma(u, \alpha, x) = \{\sigma_j^i(u, \alpha, x)\}_{i,j=1}^n$ — матрица; $m(u, \alpha, x) = (m^1(u, \alpha, x), m^2(u, \alpha, x), \dots, m^n(u, \alpha, x))$ — n -мерный вектор. Интегралы в правой части уравнения (1) понимаются как стохастические интегралы (см. (1)). Предположим, что элементы матрицы $\sigma(u, \alpha, x)$ и вектора $m(u, \alpha, x)$ равномерно удовлетворяют условию Липшица по x . Тогда доказывается, что существует случайная марковская функция $x_t(\alpha, \omega)$, принимающая значения в n -мерном евклидовом пространстве R^n и удовлетворяющая с вероятностью 1 равенству (1). Параметр $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ принимает значения из некоторой области A в R^m .

В настоящей заметке приводится ряд результатов относительно непрерывности и дифференцируемости $x_t(\alpha, \omega)$ по α .

Теорема 1. *Предположим, что существует постоянная $C < \infty$ такая, что при любых $x, y \in R^n$; $\alpha, \beta \in A \subseteq R^m$; $u \in [0, T]$, $T < \infty$*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n |\sigma_j^i(u, \alpha, x) - \sigma_j^i(u, \beta, y)| + \sum_{i=1}^n |m^i(u, \alpha, x) - m^i(u, \beta, y)| \leq \\ \leq C (\|\alpha - \beta\| + \|x - y\|)^*. \end{aligned}$$

Предположим также, что $x_0(\alpha, \omega)$ для почти всех ω непрерывна по $\alpha \in A$. Тогда существует случайная функция $x_t(\alpha, \omega)$, удовлетворяющая уравнению (1) и с вероятностью 1 непрерывная по $(t, \alpha) \in [0, T] \times A$.

Теорема 2. *Предположим, что $\sigma_j^i(u, \alpha, x)$, $m^i(u, \alpha, x)$ имеют непрерывные ограниченные производные по α_r , x^r ($i, j, r = 1, 2, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots, m$) до порядка $k+1$ включительно. Предположим также, что $x_0(\alpha, \omega)$ и $d^l x_0(\alpha, \omega) / d\alpha_1^{l_1} \dots d\alpha_m^{l_m}$, $l_1 + l_2 + \dots + l_m = l \leq k+1$, для почти всех ω существуют, ограничены и непрерывны.*

Тогда для почти всех ω и всех $l_1 + l_2 + \dots + l_m = l \leq k$ существуют непрерывные по (t, α) производные $d^l x_t(\alpha, \omega) / d\alpha_1^{l_1} d\alpha_2^{l_2} \dots d\alpha_m^{l_m}$. Если требо-

* Если $z_i = (z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^k)$, $i = 1, 2$, то $\|z_1 - z_2\| = \left(\sum_{j=1}^k |z_1^j - z_2^j|^2 \right)^{1/2}$.

вать существования $d^l x_0(\alpha, \omega) / \partial \alpha_1^{l_1} \partial \alpha_2^{l_2} \dots \partial \alpha_m^{l_m}$ лишь в среднем квадратичном * при всех $l_1 + l_2 + \dots + l_m = l \leq k + 1$, сохраняя те же требования для $\sigma(u, \alpha, x)$ и $m(u, \alpha, x)$, что и выше, то $\partial^l x_t(\alpha, \omega) / \partial \alpha_1^{l_1} \dots \partial \alpha_m^{l_m}$ также будут существовать в среднем квадратичном при всех l_1, l_2, \dots, l_m ; $l_1 + l_2 + \dots + l_m = l \leq k$. Набор случайных функций $\partial^l x_t(\alpha, \omega) / \partial \alpha_1^{l_1} \dots \partial \alpha_m^{l_m}$, $l_1 + l_2 + \dots + l_m = l \leq k$ удовлетворяет следующей системе стохастических уравнений:

$$\frac{\partial^l x_t(\alpha, \omega)}{\partial \alpha_1^{l_1} \partial \alpha_2^{l_2} \dots \partial \alpha_m^{l_m}} = \frac{\partial^l x_0(\alpha, \omega)}{\partial \alpha_1^{l_1} \partial \alpha_2^{l_2} \dots \partial \alpha_m^{l_m}} + \int_0^t \frac{\tilde{\partial}^l \sigma(u, \alpha, x_u(\alpha, \omega))}{\partial \alpha_1^{l_1} \partial \alpha_2^{l_2} \dots \partial \alpha_m^{l_m}} d\tilde{\xi}_u(\omega) + \int_0^t \frac{\tilde{\partial}^l m(u, \alpha, x_u(\alpha, \omega))}{\partial \alpha_1^{l_1} \partial \alpha_2^{l_2} \dots \partial \alpha_m^{l_m}} du. \quad (2)$$

Здесь

$$\frac{\tilde{\partial} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; x^1(\alpha), x^2(\alpha), \dots, x^n(\alpha))}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_k};$$

$$\frac{\tilde{\partial}^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\tilde{\partial}}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\tilde{\partial} f}{\partial \alpha_j} \right).$$

Из теоремы 2 вытекает следующая

Теорема 3. Пусть $x_t^x(\omega)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$x_t^x(\omega) = x + \int_0^t \sigma(u, x_u^x(\omega)) d\tilde{\xi}_u(\omega) + \int_0^t m(u, x_u^x(\omega)) du. \quad (3)$$

Тогда, если $\sigma(u, x)$ и $m(u, x)$ имеют ограниченные непрерывные производные до порядка $k + 1$ включительно по x^r , $r = 1, 2, \dots, n$, то при всех $l \leq k$ для почти всех ω существуют производные $\partial^l x_t^x(\omega) / \partial (x^1)^{l_1} \dots \partial (x^n)^{l_n}$, $l_1 + l_2 + \dots + l_n = l$. Эти производные существуют также и в среднем квадратичном.

Для доказательства сформулированных утверждений нам понадобится следующее обобщение известной теоремы А. Н. Колмогорова о непрерывности выборочных функций процесса.

Теорема. Пусть $x_\mu(\omega)$ — сепарабельное случайное поле **, определенное при $\mu \in R^m$ и принимающее значения из n -мерного евклидова пространства R^n . Тогда для того, чтобы $x_\mu(\omega)$ с вероятностью 1 было непрерывно по μ , достаточно, чтобы при некоторых $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$M \|x_\mu(\omega) - x_{\mu'}(\omega)\|^\gamma \leq C \|\mu - \mu'\|^{m+\varepsilon}.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично случаю $m = 1$ (см. (1), стр. 576).

С помощью формулы замены переменных в стохастических интегралах (2) при выполнении условий теоремы 1 удастся доказать следующее неравенство, справедливое при целых положительных n :

$$M \|x_t(\alpha, \omega) - x_s(\beta, \omega)\|^{2n} \leq C_n (\|\alpha - \beta\|^{2n} + |t - s|^n); \quad (4)$$

$$\alpha, \beta \in A, t, s \in [0, T].$$

Из последнего неравенства, в силу сформулированного выше обобщения теоремы А. Н. Колмогорова, вытекает теорема 1. (Независимо теорема 1 была доказана И. В. Гирсановым.)

* Т. е. предел в определении производной понимается как предел в среднем квадратичном.

** При естественных предположениях для любого поля $x_\mu(\omega)$ существует эквивалентное ему сепарабельное поле $\tilde{x}_\mu(\omega)$.

Поясним доказательство теоремы 2 на случае $n = m = l = 1$. Случайные функции $x_t(\beta, \omega)$ и $x_t(\beta', \omega)$ являются решениями уравнения (1) при $\alpha = \beta$ и $\alpha = \beta'$ соответственно. Функция $y_t^{\beta\beta'}(\omega) = \frac{x_t(\beta, \omega) - x_t(\beta', \omega)}{\beta - \beta'}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} y_t^{\beta\beta'}(\omega) = & y_0^{\beta\beta'}(\omega) + \int_0^t \left[\frac{\sigma(u, \beta, x_u(\beta, \omega)) - \sigma(u, \beta', x_u(\beta, \omega))}{\beta - \beta'} + \right. \\ & + \frac{\sigma(u, \beta', x_u(\beta, \omega)) - \sigma(u, \beta', x_u(\beta', \omega))}{x_u(\beta, \omega) - x_u(\beta', \omega)} y_u^{\beta\beta'}(\omega) \Big] d\xi_u(\omega) + \\ & + \int_0^t \left[\frac{m(u, \beta, x_u(\beta, \omega)) - m(u, \beta', x_u(\beta, \omega))}{\beta - \beta'} + \right. \\ & + \left. \frac{m(u, \beta', x_u(\beta, \omega)) - m(u, \beta', x_u(\beta', \omega))}{x_u(\beta, \omega) - x_u(\beta', \omega)} y_u^{\beta\beta'}(\omega) \right] du. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) совместно с уравнением (1), взятым при $\alpha = \beta$ и $\alpha = \beta'$, образует систему стохастических уравнений для случайной функции $z_t(\beta, \beta', \omega) = (x_t(\beta, \omega), x_t(\beta', \omega), y_t^{\beta\beta'}(\omega))$. Пользуясь тем, что $\sigma(u, \alpha, x)$ и $m(u, \alpha, x)$ дифференцируемы, нетрудно доказать, что коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения системы стохастических уравнений для функции $z_t(\beta, \beta', \omega)$. Для доказательства существования производной $dx_t(\beta, \omega)/d\beta = \lim_{\beta' \rightarrow \beta} y_t^{\beta\beta'}(\omega)$ до-

статочно убедиться в том, что $z_t(\beta, \beta', \omega)$ будет с вероятностью 1 непрерывна по (t, β, β') при $t \in [0, T]$, $\beta, \beta' \in A$. Последнее утверждение выводится из обобщенной теоремы А. Н. Колмогорова с помощью неравенств, аналогичных (4). Из простых оценок для стохастических уравнений вытекает, что $dx_t(\beta, \omega)/d\beta$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dx_t(\beta, \omega)}{d\beta} = & \frac{dx_0(\beta, \omega)}{d\beta} + \int_0^t \left[\frac{\partial \sigma(u, \beta, x_u(\beta, \omega))}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma(u, \beta, x_u(\beta, \omega))}{\partial x} \frac{dx_u(\beta, \omega)}{d\beta} \right] d\xi_u(\omega) + \\ & + \int_0^t \left[\frac{\partial m(u, \beta, x_u(\beta, \omega))}{\partial \beta} + \frac{\partial m(u, \beta, x_u(\beta, \omega))}{\partial x} \frac{dx_u(\beta, \omega)}{d\beta} \right] du, \end{aligned} \quad (6)$$

которое является предельным для (5) при $\beta' \rightarrow \beta$. Из неравенств, подобных (4), нетрудно вывести, что $y_t^{\beta\beta'}(\omega)$ сходится к $dx_t(\beta, \omega)/d\beta$ и в среднем квадратичном.

З а м е ч а н и е 1. Коэффициенты уравнений для старших производных, вообще говоря, растут быстрее чем $\|x\|$, и поэтому существование решения системы (2) приходится доказывать отдельно.

З а м е ч а н и е 2. С помощью некоторых дополнительных построений можно в теореме 2 избавиться от требования ограниченности производных: достаточно, чтобы для некоторого $N < \infty$ они росли не быстрее чем $\|x\|^N$. Если не заботиться о сходимости в среднем квадратичном, то от $x_0(\alpha, \omega)$ достаточно потребовать существования и непрерывности для почти всех ω всех частных производных по α_p , $p = 1, 2, \dots, m$, до порядка $k + 1$ включительно.

Аналогично усиливается теорема 3.

З а м е ч а н и е 3. Если $x_t^\alpha(\alpha, \omega)$ — одномерная случайная марковская функция, удовлетворяющая уравнению (3), то уравнение для $dx_t^\alpha(\omega)/d\alpha$ имеет вид

$$\frac{dx_t^\alpha(\omega)}{d\alpha} = 1 + \int_0^t \frac{\partial \sigma(u, x_u^\alpha(\omega))}{\partial x} \frac{dx_u^\alpha(\omega)}{d\alpha} d\xi_u(\omega) + \int_0^t \frac{\partial m(u, x_u^\alpha(\omega))}{\partial x} \frac{dx_u^\alpha(\omega)}{d\alpha} du.$$

Это уравнение можно решить в явном виде:

$$\frac{dx_t^\alpha(\omega)}{d\alpha} = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial \sigma(u, x_u^\alpha(\omega))}{\partial x} d\xi_u(\omega) + \int_0^t \frac{\partial m(u, x_u^\alpha(\omega))}{\partial x} du - \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{\partial \sigma(u, x_u^\alpha(\omega))}{\partial x} \right]^2 du \right\}.$$

Укажем на некоторые применения полученных результатов. Пусть $x_t(\omega)$ — решение стохастического уравнения (3); $x_0^x(\omega) \equiv x$; $f(x)$ — k раз непрерывно дифференцируемая функция. Тогда, если выполнены условия теоремы 3, функция $u(x, t) = Mf(x_t^x(\omega))$ имеет непрерывные частные производные по x^r , $r = 1, 2, \dots, n$, до порядка k включительно. С другой стороны, известно, что, если функция $u(x, t) = Mf(x_t^x(\omega))$ обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно по x^r , то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad (7)$$

где $a_{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^i(t, x) \sigma_k^j(t, x)$, $b_i(t, x) = m^i(t, x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, если $\sigma_k^i(t, x)$, $m^i(t, x)$ имеют непрерывные ограниченные частные производные по x^r , $r = 1, 2, \dots, n$, до порядка $k+1$ и $f(x)$ — непрерывные частные производные до порядка k включительно, то решение задачи Коши для уравнения (7) также имеет непрерывные частные производные по x^r до порядка k включительно (матрица $a_{ij}(t, x)$ может быть и вырожденной).

В заключение сформулируем следующую теорему, доказательство которой основывается на теореме 2.

Теорема 4. Пусть $x_t(\alpha, \omega)$ — случайная функция, удовлетворяющая уравнению (1), коэффициенты которого обладают непрерывными ограниченными частными производными до второго порядка включительно. Обозначим $\tau_D^\alpha(\omega) = \inf \{t: x_t(\alpha, \omega) \notin D\}$, где D — область в R^n , граница Γ которой имеет непрерывно вращающуюся нормаль. Тогда, если $\det \{ \sigma_j^i(t, x) \}_1^n \neq 0$ при $x \in \Gamma$ и $t \geq 0$, то с вероятностью 1

$$\frac{\partial \tau_D^\alpha(\omega)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

для всех α , кроме некоторого множества $\Lambda(\omega) \in R^m$ меры Лебега нуль.

Авторы выражают благодарность Е. Б. Дынкину за постановку задачи и ряд существенных замечаний.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. ж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956. ² K. Itô, Nagoya Math. J., 3, 55 (1951).

М. С. БРОДСКИЙ

КРИТЕРИЙ ОДНОКЛЕТОЧНОСТИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 I 1961)

Пусть A — вольтеров * оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathfrak{H} . Если \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 — его инвариантные подпространства ($\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2$, $\dim \{\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{H}_1\} > 1$), то, в силу теоремы Ароншайна и Смита⁽¹⁾, существует такое инвариантное подпространство \mathfrak{H}_3 , что $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_3 \subset \mathfrak{H}_2$. Оператор A называется **одноклеточным** ⁽²⁾, если одно из любых двух его инвариантных подпространств принадлежит другому. В настоящей статье устанавливается необходимое и достаточное условие одноклеточности оператора A , которому удовлетворяет его характеристическая оператор-функция.

1. Обобщая определение М. С. Лившица ⁽³⁾, представим мнимую часть оператора A в виде $\frac{A - A^*}{2i} = RJR^*$, где R — вполне непрерывное отображение некоторого гильбертова пространства \mathfrak{H}_W и \mathfrak{H} , а J — действующий в \mathfrak{H}_W оператор, удовлетворяющий условиям $J = J^*$, $J^2 = E$. Оператор-функция

$$W(\lambda) = E - 2iR^*(A - \lambda E)^{-1}RJ \quad (1)$$

называется **характеристической** для оператора A . Если \mathfrak{H} — некоторое подпространство в \mathfrak{H} , то оператор-функция

$$W_0(\lambda) = E - 2iR_0^*(A_{P_0} - \lambda E)^{-1}R_0J \quad (A_{P_0}f = P_0Af \ (f \in \mathfrak{H}_0), \ R_0 = P_0R), \quad (2)$$

где P_0 — оператор проектирования на \mathfrak{H}_0 , называется **проекцией** $W(\lambda)$ на \mathfrak{H}_0 и обозначается символом $\text{Pr}_{\mathfrak{H}_0} W(\lambda)$.

Из общей теории характеристических функций ^(4, 5) вытекает следующее утверждение:

Лемма 1. Если в пространстве \mathfrak{H} существуют такие отличные друг от друга инвариантные относительно A подпространства \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 , что $\text{Pr}_{\mathfrak{H}_1} W(\lambda) = \text{Pr}_{\mathfrak{H}_2} W(\lambda)$, то оператор A коммутирует с некоторым нескаллярным унитарным оператором.

Нам понадобится также:

Лемма 2. Если оператор A коммутирует с некоторым нескаллярным унитарным оператором U , то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(1)} \oplus \mathfrak{H}^{(2)}$ ($\mathfrak{H}^{(k)} \neq 0$, $k = 1, 2$), где $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)}$ инвариантны относительно A .

Доказательство. Обозначим через \mathfrak{H}_0 совокупность всех собственных векторов оператора $\frac{A - A^*}{2i}$, отвечающих некоторому отличному от нуля собственному значению. Так как \mathfrak{H}_0 конечномерно и инвариантно относительно U , то в \mathfrak{H}_0 существует собственный вектор f оператора U . Полагая $Uf = \tau f$, обозначим через $\mathfrak{H}^{(1)}$ подпространство, состоящее из всех

* Оператор A называется **вольтеровым**, если он вполне непрерывен и не имеет отличных от нуля точек спектра.

векторов g , для которых $Ug = \tau g$. Легко видеть, что $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)}$ инвариантны относительно A .

2. Оператор-функция $W(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1. Функция $W(\lambda)$ разлагается в сходящийся по норме ряд

$$W(\lambda) = E + \frac{1}{\lambda} W_1 + \frac{1}{\lambda^2} W_2 + \dots \quad (\lambda \neq 0),$$

где W_k ($k = 1, 2, \dots$) — вполне непрерывные операторы.

II. $W^*(\lambda) J W(\lambda) - J \geq 0$, $\text{Im } \lambda > 0$; $W^*(\lambda) J W(\lambda) - J = 0$, $\text{Im } \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$.

Совокупность всех оператор-функций, удовлетворяющих условиям I и II, обозначим через (Ω_J) . Можно показать, что каждая функция этого класса является характеристической для некоторого вольтеррова оператора.

Пусть $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ принадлежат классу (Ω_J) . Запись $W_2(\lambda) < W_1(\lambda)$ будет означать, что существует такая функция $W_3(\lambda) \in (\Omega_J)$, что $W_1(\lambda) = W_2(\lambda) W_3(\lambda)$. В этом случае будем говорить, что $W_2(\lambda)$ — делитель функции $W_1(\lambda)$. Если подпространство \mathfrak{H}_0 инвариантно относительно A , то $W(\lambda) = \text{Pr}_{\mathfrak{H}_0} W(\lambda) \text{Pr}_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0} W(\lambda)^{(6)}$, причем функции $\text{Pr}_{\mathfrak{H}_0} W(\lambda)$ и $\text{Pr}_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0} W(\lambda)$ являются характеристическими соответственно для вольтерровых операторов $P_0 A f$ ($f \in \mathfrak{H}_0$) и $(E - P_0) A f$ ($f \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$), и поэтому принадлежат классу (Ω_J) . Таким образом, каждому инвариантному подпространству оператора A соответствует делитель его характеристической оператор-функции. Легко проверить, что обратное утверждение неверно.

Оператор-функцию вида

$$T(\lambda) = E + \frac{2i\sigma}{\lambda} PJ \quad (\sigma > 0, PJP = 0),$$

где P — оператор проектирования на одномерное подпространство в \mathfrak{H}_W , будем называть элементарной. Очевидно, что все элементарные функции принадлежат классу (Ω_J) . Две элементарные функции

$$T_1 = E + \frac{2i\sigma_1}{\lambda} P_1 J, \quad T_2 = E + \frac{2i\sigma_2}{\lambda} P_2 J$$

условимся называть подобными, если $P_1 = P_2$.

Пусть $W(\lambda) = W_1(\lambda) W_2(\lambda)$ ($W_k(\lambda) \in (\Omega_J)$). Будем говорить, что $W_1(\lambda)$ — правильный делитель функции $W(\lambda)$, если $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ невозможно представить в виде

$$W_1(\lambda) = W_{11}(\lambda) W_{22}(\lambda), \quad W_2(\lambda) = W_{21}(\lambda) W_{22}(\lambda) \quad (W_{ij}(\lambda) \in (\Omega_J)),$$

где $W_{12}(\lambda)$ и $W_{21}(\lambda)$ — подобные элементарные функции.

Лемма 3. Если множество векторов вида $A^n Rf$ ($f \in \mathfrak{H}_W$, $n = 0, 1, 2, \dots$) полно в \mathfrak{H} , то делитель $W_1(\lambda)$ функции $W(\lambda)$ в том и только том случае совпадает с проекцией этой функции на некоторое инвариантное подпространство оператора A , когда он правильный.

Лемма 4. Если $W_1(\lambda)$ — неправильный делитель функции $W(\lambda)$, то существуют такие правильные делители $W_2(\lambda)$ и $W_3(\lambda)$, что $W_2(\lambda) < W_1(\lambda) < W_3(\lambda)$ и $W_3(\lambda) = W_2(\lambda) W_4(\lambda)$, где $W_4(\lambda)$ — элементарная функция.

3. Характеристическую оператор-функцию $W(\lambda)$ будем называть упорядоченной, если один из любых двух ее делителей является делителем другого.

Теорема. Простой* вольтерров оператор A в том и только том

* Вольтерров оператор A называется простым, если в \mathfrak{H} нет подпространства, аннулируемого операторами A и A^* . Если A — простой вольтерров оператор, а P_0 — проектор на его инвариантное подпространство \mathfrak{H}_0 , то множество векторов вида $A^n Rf$ ($f \in \mathfrak{H}_W$, $n = 0, 1, 2, \dots$) полно в \mathfrak{H} , а множество векторов вида $A^n P_0 Rf$ ($f \in \mathfrak{H}_W$, $n = 0, 1, 2, \dots$) полно в \mathfrak{H}_0 .

случае одноклеточен, когда его характеристическая оператор-функция $W(\lambda)$ упорядочена.

Доказательство. Пусть $W(\lambda)$ — упорядоченная функция. Если оператор A не одноклеточен, то существуют такие инвариантные относительно A подпространства \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 , что ни одно из них не принадлежит другому. Проекция $W_1(\lambda)$ и $W'_1(\lambda)$ функции $W(\lambda)$ на эти подпространства сравнимы между собой. Пусть, например, $W_1(\lambda) < W'_1(\lambda)$. Из леммы 3 и соотношений

$$W'_1(\lambda) = W_1(\lambda) W_2(\lambda), \quad W(\lambda) = W_1(\lambda) W_2(\lambda) W_3(\lambda) \quad (W_2(\lambda), W_3(\lambda) \in (\Omega_J))$$

следует, что $W_1(\lambda)$ — правильный делитель функции $W'_1(\lambda)$. Применяя снова лемму 3, найдем такое инвариантное относительно A подпространство $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_1$, что проекция $W(\lambda)$ на \mathfrak{H}_2 будет равна $W_1(\lambda)$. Так как $\mathfrak{H}_2 \neq \mathfrak{H}_1$, то, в силу лемм 1 и 2, пространство \mathfrak{H} представимо в виде $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(1)} \oplus \mathfrak{H}^{(2)}$ ($\mathfrak{H}^{(k)} \neq 0, k = 1, 2$), где $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)}$ инвариантны относительно A .

Введем оператор проектирования $P^{(k)}$ ($k = 1, 2$) на подпространство $\mathfrak{H}^{(k)}$ и рассмотрим проекции

$$W^{(k)}(\lambda) = E - 2iR^*P^{(k)}(A_{P^{(k)}} - \lambda E)^{-1}P^{(k)}RJ \quad (k = 1, 2).$$

Одна из этих проекций, например $W^{(1)}(\lambda)$, должна быть делителем второй

$$W^{(2)}(\lambda) = W^{(1)}(\lambda) W^{(3)}(\lambda) \quad (W^{(3)}(\lambda) \in (\Omega_J)).$$

Разлагая в ряд обе части последнего равенства в окрестности бесконечно удаленной точки и сравнивая коэффициенты при $1/\lambda$, получим

$$P^*P^{(2)}R = R^*P^{(1)}R + H \quad (H \geq 0). \quad (3)$$

Ни одно из подпространств $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)}$ не может аннулироваться оператором $\frac{A - A^*}{2i}$, так как в противном случае оператор A не будет простым. Следовательно, в подпространстве $\mathfrak{H}^{(1)}$ найдется собственный вектор e ($\|e\| = 1$) оператора $\frac{A - A^*}{2i}$, которому соответствует отличное от нуля собственное число ω . Таким образом

$$(RJHJR^*e, e) = \left(\frac{A - A^*}{2i} (P^{(2)} - P^{(1)}) \frac{A - A^*}{2i} e, e \right) = -\omega^2,$$

что противоречит равенству (3).

Пусть теперь A — одноклеточный оператор. Тогда сравнимость двух правильных делителей функции $W(\lambda)$ очевидна. Сравнимость делителей в остальных случаях легко следует из леммы 4.

Одесский государственный педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
9 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Ароншайн, К. Т. Смит, Сборн. пер. Математика, 2, № 1, 97 (1958).
² М. С. Бродский, ДАН, 111, № 5, 926 (1956). ³ М. С. Лившиц, Матем. сборн., 34 (76), 1, 145 (1954). ⁴ М. С. Бродский, Матем. сборн., 39 (81), 2, 179 (1956).
⁵ М. С. Бродский, М. С. Лившиц, УМН, 13, в. 1 (79), 3 (1958). ⁶ М. С. Бродский, ДАН, 97, № 5, 761 (1954).

В. Н. БУРОВ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ НЕЛИНЕЙНЫМ СВЯЗЯМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 I 1961)

1°. Пусть на компакте Q задана непрерывная вещественная функция $f(q)$ и указан класс K вещественных обобщенных полиномов вида

$$y(q) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q), \quad (1)$$

где $\{\varphi_k(q)\}_1^n$ — система из n линейно независимых и непрерывных на Q функций. Пусть требуется равномерно аппроксимировать функцию $f(q)$ полиномами (1), подчиненными заданным связям, о которых пойдет речь ниже в 2°.

Для каждого полинома $y(q) \in K$ положим

$$L_f(y) = \max_{q \in Q} |f(q) - y(q)|, \quad (2)$$

причем через $E(y)$ будем обозначать множество всех точек максимального отклонения $y(q)$ от $f(q)$, т. е. точек $q \in Q$, в которых $|f(q) - y(q)| = L_f(y)$.

Известно (1), что всегда разрешима задача о наилучшем (в смысле П. Л. Чебышева) приближении функции $f(q)$ полиномами из K . Поэтому мы вправе положить

$$\min_{y \in K} L_f(y) = \rho^*. \quad (3)$$

Переходя на геометрический язык, будем отождествлять полином $y(q) \in K$ с его изображающей точкой (a_1, a_2, \dots, a_n) в n -мерном пространстве коэффициентов R_n . Тогда совокупность всех полиномов наилучшего приближения для $f(q)$ можно истолковать как ограниченное, замкнутое выпуклое множество $V^* \equiv V_{\rho^*} \subset R_n$. Через S_{ρ^*} обозначим границу V_{ρ^*} .

Если $L > \rho^*$, то равенство $L_f(y) = L$, очевидно, реализуется на непустом подмножестве полиномов из K , которые образуют в R_n замкнутую поверхность S_L , ограничивающую выпуклое тело V_L . Ясно, что при $L' < L$ будем иметь

$$V_{L'} \subset V_L, \quad S_{L'} \cap S_L = \Lambda. \quad (4)$$

2°. Чтобы наложить связь на полиномы (1), выделим в R_n непустое замкнутое множество Ω и определим более узкий класс полиномов сравнения $\Omega \subset K$, считая $y(q) \in K_\Omega$ тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$. В конкретных случаях множество Ω можно задавать, например, неравенствами

$$\alpha_j \leq \omega_j(y) \leq \beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (5)$$

где $\omega_j(y)$ — непрерывные функционалы, а α_j, β_j — постоянные числа, обеспечивающие допустимость связей (5), т. е. непустоту Ω . В частности, это

могут быть и неоднократно изучавшиеся ⁽²⁻⁸⁾ линейные связи

$$w_j(y) \equiv \sum_{k=1}^n \delta_{jk} a_k = \beta_j \quad (j=1, 2, \dots, p; p \leq n). \quad (6)$$

Определение. $y^*(q)$ называется экстремальным полиномом функции $f(q)$ в классе K_Ω , если $y^*(q) \in K_\Omega$ и для него

$$L_f(y^*) = \inf_{y \in K_\Omega} L_f(y) \equiv \rho_\Omega. \quad (7)$$

Совокупность изображающих точек всех экстремальных полиномов в пространстве R_n обозначим V_Ω^* .

3°. Из соотношений (4) и замкнутости множества Ω вытекает существование наименьшего значения $L \geq \rho^*$, при котором пересечение $\Omega \cap S_L$ не пусто. В свою очередь, отсюда следует:

Теорема 1. Для всякой непрерывной на Q функции $f(q)$ существует по крайней мере один экстремальный полином $y^*(q)$, причем

$$\rho_\Omega = \min_{\Omega \cap S_L \neq \emptyset} L, \quad V_\Omega^* = \Omega \cap S_{\rho_\Omega}. \quad (8)$$

При этом, если Ω выпукло, то V_Ω^* также выпукло и лежит в опорной для V_Ω гиперплоскости. Одновременно на компакте Q существует общая база (ср. ^(4v)) совместных точек уклонения всех экстремальных полиномов.

Теорема 2. Для единственности экстремального полинома $y^*(q)$ достаточно, чтобы выпуклая оболочка множества Ω была строго выпуклой, не содержала внутри себя точек V^* и чтобы поверхность ее целиком содержалась в Ω .

Нетрудно распространить с линейного случая критерий Б. А. Рыма-ренко ^(4a).

Теорема 3. Для того чтобы полином $y^*(q) \in K_\Omega$ был экстремальным, достаточно — а в случае выпуклости множества Ω и необходимо, — чтобы для всякого полинома $y(q) \in K_\Omega$ оказалось

$$\min_{q \in E(y^*)} \{[y(q) - y^*(q)] [f(q) - y^*(q)]\} \leq 0. \quad (9)$$

4°. Пусть Ω выпукло и $y_0^* \in V_\Omega^*$. Тогда, если также $y^* \in V_\Omega^*$, то необходимо

$$\min_{q \in E(y_0^*)} \{[y^*(q) - y_0^*(q)] [f(q) - y_0^*(q)]\} = 0. \quad (10)$$

Наоборот, если полином $y^*(q) \in K_\Omega$ удовлетворяет соотношению (10), то при достаточно малых $\lambda \geq 0$ полином сравнения $y_0^*(q) + \lambda [y^*(q) - y_0^*(q)]$ окажется экстремальным.

Введение параметра λ и геометрические соображения пунктов 1° — 3° позволяют применить теорию однопараметрической задачи, изложенную в работах автора ⁽⁹⁾. Это способствует выяснению вопросов об общем виде экстремальных полиномов.

Теорема 4. Пусть $y_0^*(q)$ — один из экстремальных полиномов. Для того чтобы $y^*(q) \in K_\Omega$ был также экстремальным полиномом, достаточно — а при выпуклости Ω и необходимо — выполнение условий

$$N(y^* - y_0^*) \cap E(y_0^*) \neq \emptyset, \quad (11)$$

$$\inf_{q \in Q \setminus N(y^* - y_0^*)} \left\{ \frac{[f(q) - y_0^*(q)] \operatorname{sign} [y^*(q) - y_0^*(q)] + \rho_\Omega}{|y^*(q) - y_0^*(q)|} \right\} \geq 1, \quad (12)$$

где $N(h)$ обозначает множество всех нулей полинома $h(q) \in K$ на компакте Q .

Теорема 5. Если множество Ω порождает линейные связи (6), то общий вид всех экстремальных полиномов дается формулой

$$y^*(q) = y_0^*(q) + \lambda h(q), \quad (13)$$

где $y_0^*(q)$ — любой фиксированный экстремальный полином; $h(q)$ — произвольный полином класса K , удовлетворяющий условиям

$$\omega_j(h) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p); \quad (14)$$

$$N(h) \cap E(y_0^*) \neq \emptyset; \quad (15)$$

$$\max_{q \in Q} |h(q)| = 1, \quad (16)$$

и λ — любое значение из сегмента $[\lambda^-, \lambda^+]$, где

$$\begin{aligned} \lambda^- &= \sup_{q \in Q \setminus N(h)} \left\{ \frac{[f(q) - y_0^*(q)] \operatorname{sign} h(q) - \rho_\Omega}{|h(q)|} \right\}, \\ \lambda^+ &= \inf_{q \in Q \setminus N(h)} \left\{ \frac{[f(q) - y_0^*(q)] \operatorname{sign} h(q) + \rho_\Omega}{|h(q)|} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

5°. Изложенный геометрический подход открывает возможность далеко идущих приложений. Например, облегчается анализ задач аппроксимации полиномами с неотрицательными коэффициентами, с закрепленными коэффициентами при указанных $\varphi_k(q)$, регулярно монотонными⁽¹⁰⁾ полиномами и др., когда Ω заведомо является выпуклым. Можно также, идя с «другого конца» (ср. (8)), налагать связи, при которых заранее намеченные полиномы с равными $L_f(y)$ окажутся экстремальными.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Б. А. Рымаренко за обсуждение результатов данной работы.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступило
8 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. И. Зуховицкий, УМН, 11, 2 (68), 125 (1956). ² В. А. Марков, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб, 1892. ³ Н. И. Ахмезер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938. ⁴ Б. А. Рымаренко, а) Тр. Харьковск. полиграф. инст., 4, 49 (1940); б) Докл. АН УзССР, 2, 7 (1950); в) Докл. АН УзССР, 7, 3 (1952). ⁵ Е. В. Вороновская, ДАН, 99, № 1, 5 (1954). ⁶ S. P a s z k o w s k i, а) Ann. Pol. Math., 2, № 1, 118 (1955); б) Rozprawy Matem., PAN, 14, 1 (1957). ⁷ Д. Г. Гребенюк, Полиномы наилучшего приближения, коэффициенты которых связаны линейными зависимостями, Ташкент, 1960. ⁸ Е. Я. Ремез, В. Д. Коромысличенко, ДАН, 135, № 2, 266 (1960); 135, № 4, 787 (1960). ⁹ В. Н. Буров, а) Изв. Высш. учебн. завед., Математика, 1, 67(1957); б) Уч. зап. Ленингр. пед. инст., 183, 129 (1958). ¹⁰ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 1, № 32. Изд. АН СССР, 1952.

М. И. ВИШИК

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ,
ИМЕЮЩИХ ДИВЕРГЕНТНУЮ ФОРМУ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 I 1961)

Доказаны теоремы о разрешимости и единственности решения краевых задач для некоторого класса квазилинейных систем дифференциальных уравнений. Грубо говоря, это — такие системы, для которых соответствующие уравнения в вариациях образуют сильно эллиптический оператор ⁽¹⁾. Для того чтобы рассматриваемые задачи были при любых данных и в любой области разрешимы, предполагается, как и в линейном случае, положительность квадратичной формы оператора в вариациях. В первой части заметки мы приводим полученные результаты в самой общей форме, и поэтому налагаемые ограничения имеют функциональную форму, во второй части приводятся достаточные алгебраические условия, при которых справедливы теоремы о разрешимости и о единственности решения (см. ⁽²⁾).

1. В области $D \subset R^n$ с границей Γ дана система:

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha|, |\gamma| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha A_\alpha(x, D_\gamma u) = h(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $D_\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D_0 = E$ (единичный оператор). Функции $u = (u^1, \dots, u^N)$, $h = (h^1, \dots, h^N)$, $A_\alpha(\cdot) = (A_\alpha^1(\cdot), \dots, A_\alpha^N(\cdot))$ принимают векторные значения в R^N , причем $A_\alpha(x, 0) = 0$. Таким образом, (1) является системой N уравнений с N неизвестными $u^i(x)$. Ищется решение (1) при граничных условиях первой краевой задачи:

$$u|_\Gamma = \varphi_0(x), \dots, \partial^{m-1} u / \partial n^{m-1} |_\Gamma = \varphi_{m-1}(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

или при других краевых условиях (см. п. 2).

Для простоты записи мы считаем, что оператор $L(u)$ (1) имеет одинаковый порядок $2m$ относительно всех функций u^1, \dots, u^N . С очевидными изменениями все переносится на случай, когда относительно u^k он имеет порядок $2m_k$.

Под решением задачи (1), (2) мы понимаем такую функцию u , удовлетворяющую на Γ условиям (2), для которой

$$[A_\alpha(x, D_\gamma u), D_\alpha v] = [h, v] \quad (3)$$

при любой функции v , удовлетворяющей нулевым условиям (2) на Γ ; $[\cdot, \cdot]$ — обычное скалярное произведение вектор-функций; по одинаковым индексам α, β, \dots всюду следует суммировать как в (1). Очевидно, что пространство V_0 функций v и пространство U , в котором ищется решение u , выбираются в зависимости от порядка роста $A_\alpha(\cdot, \cdot)$ по вторым аргументам, причем так, чтобы подынтегральные выражения в (3) были суммируемы (см. примеры в п. 3). Предполагается, что $V_0 \subset U$. Например, V_0 и U — такие пространства типа $W_p^{(l)}$ (см. ⁽³⁾), что $A_\alpha(x, D_\gamma u) \in \mathcal{L}_p$, а $D_\alpha v \in \mathcal{L}_q$, $1/p + 1/q = 1$. Мы ограничимся лишь случаем таких пространств V_0 и U . Мы предполагаем, что для любой функции $w \in U$ или $w \in U' \subset U$, $U' = U$, квадратичная форма по $v \in V_0$ или $v \in V_0'$, $V_0' = V_0$,

$$A(w; v, v) \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} [A_{\alpha\beta}(x, D_\gamma w) D_\beta v, D_\alpha v] \quad (4)$$

в определенном смысле положительная, например:

$$A(w; v, v) \geq c^2 \left(\sum_{|\alpha| = m} [|D_\alpha w|^{\delta_j} D_\alpha v^j, D_\alpha v^j] + \dots \right), \quad \delta_j \geq 0^*, \quad (I_1)$$

причем члены, соответствующие многоочию, могут отсутствовать; $A_{\alpha\beta}(\cdot) = -\partial A_\alpha(\cdot)/\partial(D_\beta w)$ при фиксированных α и β — матрица порядка N ; или

$$A(w; v, v) \geq c^2 \sum_{|\beta| = m} \left[\left(1 + \sum |D_\alpha w|^2 \right)^{-\delta/2} D_\beta v, D_\beta v \right], \quad (I_2)$$

где $-\delta > -1$. Более общие условия на $A(\cdot)$, при которых наши выводы справедливы, приводятся в примере 4 п. 3. Очевидно, $A(w; v, v)$ есть квадратичная форма вариации оператора L в «точке» w .

Полагая в обеих частях (I₁), соответственно (I₂), $w = f + tv$ и интегрируя по t от 0 до 1, мы получим:

$$I(v) \equiv [A_\alpha(x, D_\gamma(f+v)) - A_\alpha(x, D_\gamma f), D_\alpha v] \geq \\ \geq c^2 \sum_{|\alpha| = m} \left[(|D_\alpha v|^{\delta_j} + |D_\alpha f|^{\delta_j}) D_\alpha v^j, D_\alpha v^j \right] + \dots \quad (j = 1, \dots, N; |\alpha| = m),$$

соответственно

$$I(v) \geq c_1^2 \left[(1 + \sum |D_\alpha f|^2 + \sum |D_\alpha v|^2)^{-\delta/2} D_\beta v, D_\beta v \right]. \quad (6)$$

Следовательно, в случае (I₁) $I(v)$ имеет по $D_\alpha v^j$ порядок роста не меньше $2 + \delta_j$, а в случае (I₂) — не меньше $2 - \delta > 1$.

Условия (II) сводятся к тому, что при дифференцировании $A_\alpha(\cdot)$ по $D_\gamma v$ порядок роста убывает на единицу, при частном дифференцировании по x порядок не возрастает. Для краткости мы эти очевидные ограничения в общем виде здесь подробно не формулируем, а только приводим в применении к примерам (п. 3). Основным среди условий (II) является следующее:

$$|[\zeta A_{\alpha\beta}(x, D_\gamma(f+z)) D_\beta v, D_\alpha z]| + |[\zeta A_{\alpha\beta}(\cdot) D_\alpha z, D_\alpha v]| \leq \\ \leq \varepsilon A(f+z; v, v) + M I(z) + C \quad (|\omega| \leq m, |\beta| \leq m), \quad (7)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало; $M = M(\varepsilon)$ и C — постоянные, не зависящие от v и z ; f фиксировано; ζ — функция, обращающаяся на Γ в нуль вместе с несколькими производными.

Последнее наше условие: найдется такой показатель $p_\alpha > 1$, что

$$\|A_\alpha[(x, D_\gamma(f+v)), D_\alpha v]\|_{p_\alpha} \leq C I(v) + M \quad (III)$$

для $v \in V_0$. Очевидно, что при проверке выполнения этого условия следует пользоваться теоремами вложения.

Систему (I) назовем сильно эллиптической и притом дефинитной при краевых условиях первой краевой задачи, если выполнены условия (I), (II), (III).

Теорема 1. Если квазилинейная система (I) — сильно эллиптическая и притом дефинитна, то при любой правой части $h \in H^{**}$ задача (1), (2) разрешима, т. е. существует функция $u \in U$, удовлетворяющая (2) и (3).

Пусть $f(x)$ — какая-нибудь функция из U' , удовлетворяющая условиям (2). Тогда $z = f - u \in V_0$, $u = f + z$. Задача сводится, согласно (3), к нахождению по заданной функции $f(x)$, заменяющей условия (2), такой функции $z \in V_0$, что

$$[A_\alpha(x; D_\gamma(f+z)), D_\alpha v] = [h, v] \quad (8)$$

* Отметим, что суммирование справа в (I₁) не обязательно происходит по всем α с $|\alpha| = m$.

** Здесь в качестве H заведомо можно взять $W_q^{(-s)}$ с соответствующим q , а в ряде случаев можно взять $H = \mathcal{L}_q$ или $H = \mathcal{L}_q^{(-s)}$ (см. (2)).

для $v \in V_0$. Ее естественно назвать проекцией $f(x)$ на V_0 . Мы доказываем существование этой проекции с помощью следующего метода Галерки-на (моментов). Пусть $\{v_i(x)\}$, $v_i \in V_0$, — такая система гладких функций, что система $(M - \psi\Delta) v_i$ полна в V_0 (см. лемму 2). Приближенное

значение z мы ищем в виде $z_n = \sum C_{in} v_i$, причем C_{in} определяем из системы уравнений

$$[(M - \Delta\psi) L(f + z_n), v_j] = [h, (M - \psi\Delta) v_j], \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где $\psi(x) > 0$, $x \in D$, — гладкая функция, обращающаяся вместе с несколькими производными в нуль на границе Γ ; $M > 0$; Δ — оператор Лапласа.

Л е м м а 1 (основная). Для любых гладких $v \in V_0$ справедлива оценка:

$$[P(L(f+v) - L(f)), v] \geq c^2 I(v) + [\psi A_{\alpha\beta}(f+v) D_\beta D_i v, D_\alpha D_i v] + C, \quad (10)$$

где M — достаточно большая константа, $P \equiv M - \Delta\psi$.

Отсюда и из леммы заметки ⁽²⁾ выводим разрешимость системы (9). Далее, используя условие (I₁) или (I₂) и (10), мы, аналогично ⁽²⁾, доказываем сходимость подпоследовательности z_n к z , причем в D почти всюду $A_\alpha(x, D_\gamma z_n) \rightarrow A_\alpha(x, D_\gamma z)$ и в метрике \mathcal{L}_{p_α} они имеют равномерно ограниченные нормы. Следовательно, согласно (9), z удовлетворяет (8) с заменой v на $(M - \psi\Delta) v_j$.

Отсюда следует, что найденная функция z удовлетворяет (8) при любых $v \in V_0$. Существование «проекции» z , и тем самым разрешимость задачи (1), ⁽²⁾, доказана.

Л е м м а 2. При достаточно большом M и любой правой части $g \in \mathcal{L}_2$ уравнение (без краевых условий)

$$P^* v \equiv (M - \psi\Delta) v = g \quad (11)$$

разрешимо, и притом единственным образом, в классе функций с конечной нормой $\|v\| + \|\psi^{1/2} D_i v\| < +\infty$, $D_i = \partial/\partial x_i$.

Т е о р е м а 2 (единственности). Если выполнено условие (I₂) или условие (I₁), «правой части которого имеется слагаемое $[v, v]$, то построенное решение сильно эллиптической системы (1) единственно в пространстве U . Предполагается, что для $u \in U$ $A_\alpha(x, D_\gamma u) \in \mathcal{L}_{p_\alpha}$, $D_\alpha u \in \mathcal{L}_{q_\alpha}$, $1/p_\alpha + 1/q_\alpha = 1$ (см. ⁽²⁾).

2. Другие краевые задачи. Для простоты ограничимся второй краевой задачей для систем второго порядка, т. е. в области D дано уравнение (1) при $m = 1$, а на границе Γ условие

$$\sum_{|\alpha|=1}^n A_\alpha^*(x, D_\gamma u) \cos(n, x_\alpha)|_\Gamma = \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N). \quad (12)$$

Решение задачи (1), (12) определяется соотношением

$$[A_\alpha(x, D_\gamma u) - A_\alpha(x, D_\gamma f), D_\alpha v] = [h, v] - [A_\alpha(x, D_\gamma f), D_\alpha v], \quad (13)$$

где функция $f(x)$, $x \in D + \Gamma$, удовлетворяет на Γ условию (12); v — любой элемент пространства V типа $W_p^{(1)}$, не подчиненный никаким условиям на Γ . Условие сильной эллиптичности задачи (1), (12) аналогично условиям (I₁), (I₂), (II), (III) с заменой V_0 всюду на V . Решение задачи (1), (12) находим также с помощью аналога метода проекций: $u = f + z$, $z \in V$. Имеют место теоремы существования и единственности решения задачи (1), (12), аналогичные теоремам 1 и 2 и аналогично доказываемые.

3. Достаточные алгебраические условия. Примеры. Алгебраические условия, приводимые ниже, являются достаточными для разрешимости и единственности решения как первой, так и второй краевых задач в любой области D .

1) Начнем с простейшего полиномиального случая: $A_\alpha(x, D_\gamma u) = \sum a_{\alpha\gamma\delta}(x) (D_{\gamma_1} u)^{\delta_1} \dots (D_{\gamma_N} u)^{\delta_N}$, $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in})$, $|\gamma_i| = m$, $\delta_1 + \dots$

$\dots + \delta_N = 2l + 1$. Если коэффициенты $a_{\alpha\gamma\delta}(x)$ ограничены в D и имеют ограниченные производные, причем

$$C^2(\cdot)(\cdot) \geq (A_{\alpha\beta}(x, \eta_\gamma) \zeta_\beta, \zeta_\alpha) \geq c^2 \left(\sum |\eta_\gamma|^{2l} \right) \left(\sum |\zeta_\alpha|^2 \right), \quad (14)$$

то система (1) при условиях (2) — сильно эллиптическая, справедлива теорема 1. В качестве U достаточно взять $W_p^{(m)}$, где $p = 2l + 2$, $V_0 \subset U$. В случае второй краевой задачи справедливо то же, если в уравнении (1) имеется еще, например, слагаемое $\omega^2(x)u$, $\omega^2(x) \geq \omega^2 > 0$. В этом случае также имеет место теорема единственности решения обеих краевых задач.

2) Пусть в уравнении (1) имеются лишь члены $A_\alpha(x, D_\gamma u)$ с $|\alpha| = m$, $|\gamma| = m$. Далее, для любых $\eta_\gamma, \zeta_\alpha$

$$C^2(\cdot)(\cdot) \geq (A_{\alpha\beta}(x, \eta_\gamma) \zeta_\beta, \zeta_\alpha) \geq c^2 \left(\left(1 + \sum |\eta_\gamma|^2 \right)^{-\delta/2} \zeta_\alpha, \zeta_\alpha \right), \quad (15)$$

где $-\delta > -1$, причем $A_\alpha(\cdot)$ и $\partial A_\alpha / \partial x$ имеют по η порядок роста не выше $1 - \delta$, а $A_{\alpha\beta}(\cdot)$ и $\partial A_{\alpha\beta} / \partial x$ имеют порядок не больше $-\delta$. Тогда задача (1), (2) — сильно эллиптическая, имеют место теоремы 1 и 2. Здесь $U = W_p^{(m)}$, где $p = 2 - \delta$. Если в (1) имеется еще член $\omega^2 u$, то и вторая краевая задача обладает этими свойствами.

З а м е ч а н и е. Построенные решения u в примерах 1) и 2) имеют в D производные до $(m + 1)$ -го порядка и в случае $m = 1$ удовлетворяют (1) почти всюду в D (см. (2)). Отметим, что одно эллиптическое уравнение второго порядка вида (1) изучалось другими методами при условиях типа (14) в ряде работ (см., например, (4-7) и приведенную там литературу).

3) Аналогичные утверждения справедливы и тогда, когда в уравнении (1) имеются и члены более низкого порядка. В этом случае достаточно выполнения лишь правого неравенства (15) (или неравенства, аналогичного (I₁)), причем суммирование в среднем члене происходит по всем $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$, а справа достаточно суммировать по $|\alpha| = m$. Вместо левого неравенства налагаются условия подчиненности (II) и (III).

4) Условия (I₁), (I₂), (I₄), (15) можно значительно ослабить. Для построения решения, т. е. справедливости теоремы 1, достаточно, чтобы лишь существовали функции $F_\alpha = F_\alpha(\eta_\gamma)$, $|\alpha| = |\gamma| = m$, топологически отображающие евклидово пространство всех $\{\eta_\gamma\}$, $|\gamma| = m$, на пространство всех $\{F_\alpha\}$, $|\alpha| = m$, причем

$$(A_{\alpha\beta}(x, \eta_\gamma) \zeta_\beta, \zeta_\alpha) \geq c^2 \sum_{\alpha, \beta} |F_{\alpha\beta}(\eta_\gamma) \zeta_\beta|^2, \quad F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial \eta_\beta},$$

и выполнялись условия, о которых говорилось в конце примера 3).

5) Если оператор $L(u) = L^0(u) + L^1(u)$, где L^0 — линейный сильно эллиптический оператор с постоянными коэффициентами $A_{\alpha\beta}^0$, причем $\Sigma(A_{\alpha\beta}^0 \xi^\beta \bar{\xi}^\alpha \bar{\xi}) > 0$ для $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \neq 0$, $|\bar{\xi}| = 1$, а $L^1(u)$ — квазилинейный сильно эллиптический оператор, и притом дефинитный, то имеет место теорема существования и единственности решения задачи (1), (2). Этот пример показывает, что в случае первой краевой задачи функциональные условия п. 1 менее стеснительны, чем условия п. 3.

Поступило
4 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. И. Вишик, Матем. сборн., 29 (71), 615 (1951). ² М. И. Вишик, ДАН, 137, № 3 (1961). ³ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ⁴ С. Н. Бернштейн, УМН, 8, 32 (1941). ⁵ О. А. Ладыженская, ДАН, 120, № 5 (1958). ⁶ Т. Б. Соломяк, ДАН, 127, № 2 (1959). ⁷ Н. Н. Уралцева, ДАН, 130, № 6 (1960).

Е. Г. ДЬЯКОНОВ

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 XII 1960)

Исследованию асимптотики числа арифметических действий для нахождения решений задач математической физики посвящен ряд работ (1-6). В данной работе строится итерационный метод решения систем конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения эллиптического типа $2m$ -го порядка, который требует для нахождения решения системы с точностью ε числа арифметических действий $\asymp \frac{\ln^2 h}{h^2} \ln \varepsilon$, где h — шаг сетки. Лучшая асимптотика достигалась ранее только для более узких классов задач.

1. В квадрате $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ищется решение самосопряженного эллиптического уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2):

$$Lu = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_\alpha (a_\alpha D_\alpha u) + (-1)^{|\beta|} \sum_{|\beta|=m} D_\beta (b_\beta D_\beta u) = f; \quad (1)$$

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \right)_S = (0, 0, \dots, 0). \quad (2)$$

Здесь α, β — двумерные векторы дифференцирования; a_α, b_β, f — функции x и y ; ν — нормаль к S — границе области D ;

$$a_\alpha \in C^{(m+1)}; \quad b_\beta \in C^{(|\beta|+1)}; \quad a_\alpha \geq 0; \quad b_\beta \geq 0; \quad a_{(m,0)} > 0; \quad a_{(0,m)} > 0.$$

Строим разностную аппроксимацию нашей задачи. Пусть D_h — совокупность точек

$$x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad \text{где } h = 1/N, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3)$$

Множество точек, у которых $0 \leq i \leq m-1$ или $N-m+1 \leq i \leq N$, или то же выполнено для j , обозначим через S_h .

$$u_{ij} = 0, \quad \text{если } i, j \in S_h. \quad (4)$$

Для u_{ij} , для которых $i, j \in D_h \setminus S_h$, получаем систему конечно-разностных уравнений

$$L_h u = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_\alpha^h (a_\alpha D_\alpha^h u) + (-1)^{|\beta|} \sum_{|\beta|=m} D_\beta^h (b_\beta D_\beta^h u) = f; \quad (5)$$

D_α^h обозначает обычные «правые» разности по вектору α , D_α^h — «левые»; u — $(N+1)^2$ -мерный вектор, удовлетворяющий (4). Такая разностная аппроксимация рассматривалась в (7), где для нее установлена сходимость к решению (1), (2).

Теорема 1. Разностная аппроксимация (4) — (5) сохраняет свойства самосопряженности и положительности дифференциальных операторов.

Доказательство основывается на том, что (5) получается из условия минимума $\sum_{ij} h^2 \sum_{\alpha} (a_{\alpha} D_{\alpha}^h u_{ij})^2 + \sum_{ij} h^2 \sum_{\beta} (b_{\beta} D_{\beta}^h u_{ij})^2 - \sum_{ij} h^2 f_{ij} u_{ij}$ на классе функций (4), как это установлено в (8) для уравнений с постоянными коэффициентами.

Различные преобразования сумм проводятся с помощью методики (9). Рассмотрим теперь вопрос о нахождении решения (4), (5).

2. Пусть $M_h u = (-1)^m (D_{(m,0)}^n D_{(m,0)}^h + D_{(0,m)}^n D_{(0,m)}^h) u$.

Теорема 2. Если ψ удовлетворяет (4) и $(M_h \psi, \psi) = 1$, то существуют такие константы m_0 и M_0 , не зависящие от h , что

$$0 < m_0 \leq (L_h \psi, \psi) \leq M_0. \quad (6)$$

$$(\varphi, \psi) \text{ обозначает } \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_{ij} \psi_{ij} h^2.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (L_h \psi, \psi) &\geq (-1)^m [(D_{(m,0)}^h a_{(m,0)} D_{(m,0)}^h \psi, \psi) + (D_{(0,m)}^h a_{(0,m)} D_{(0,m)}^h \psi, \psi)] \geq \\ &\geq \min \{a_{(m,0)}, a_{(0,m)}\} \left[\sum_{ij} h^2 [(D_{(m,0)}^h \psi_{ij})^2 + (D_{(0,m)}^h \psi_{ij})^2] \right] = m_0 (M_h \psi, \psi). \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения оценки сверху в (6) достаточно получить оценку

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=m} (D_{\alpha}^h D_{\alpha}^h \psi, \psi) \leq k (M_h \psi, \psi), \quad (8)$$

так как

$$\begin{aligned} (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} (D_{\alpha}^h a_{\alpha} D_{\alpha}^h \psi, \psi) &= \sum_{ij} h^2 \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} (D_{\alpha}^h \psi_{ij})^2 \leq \\ &\leq \max_{i,j,\alpha} a_{\alpha} \sum_{ij} h^2 \sum_{|\alpha|=m} (D_{\alpha}^h \psi_{ij})^2 \leq (-1)^m \max_{i,j,\alpha} a_{\alpha} \sum_{|\alpha|=m} (D_{\alpha}^h D_{\alpha}^h \psi, \psi), \end{aligned}$$

а для других выражений вида $(-1)^{|\beta|} (D_{\beta}^h b_{\beta} D_{\beta}^h \psi, \psi)$ получается аналогичным способом оценка через $(-1)^{|\beta|} (D_{\beta}^h D_{\beta}^h \psi, \psi)$ и, следовательно, через $(-1)^m (D_{\alpha\alpha}^h \psi, \psi)$.

Приступим к доказательству (8). Рассмотрим разложение по $v_{kl}(i, j) = c \sin k\pi hi \sin l\pi hj$, где $1 \leq k, l \leq N-1$ и

$$(v_{kl}, v_{k'l'}) = \begin{cases} 1, & (k-k')^2 + (l-l')^2 = 0, \\ 0, & (k-k')^2 + (l-l')^2 \neq 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\Delta_{xx} v_{kl} = -\lambda_{kl}^2 v_{kl}; \quad \Delta_{yy} v_{kl} = -\mu_{kl}^2 v_{kl}; \quad \psi = \sum_{k,l} d_{kl} v_{kl}.$$

Тогда, в силу краевых условий (4), если $2\alpha = (2m_1, 2m - 2m_1)$, то

$$\begin{aligned} (-1)^m (D_{\alpha\alpha}^h \psi, \psi) &= \sum_{i,j=0}^N h^2 \left[\sum_{k,l=0}^{N-1} d_{kl} \lambda_{kl}^{2m_1} \mu_{kl}^{2m-2m_1} v_{kl}(i, j) \right] \left[\sum_{k,l} d_{kl} v_{kl}(i, j) \right] = \\ &= \sum_{k,l=1}^{N-1} d_{kl}^2 \lambda_{kl}^{2m_1} \mu_{kl}^{2m-2m_1} \leq c_1 \sum_{k,l=1}^{N-1} d_{kl}^2 (\lambda_{kl}^{2m} + \mu_{kl}^{2m}), \end{aligned} \quad (10)$$

так как $(\lambda^2 + \mu^2)^m < c_1 (\lambda^{2m} + \mu^{2m})$ и $c_1 > 0$ не зависит от h .

С другой стороны, аналогичным образом убеждаемся, что

$$(M_h \psi, \psi) = \sum_{k, l=1}^{N-1} d_{kl}^2 (\lambda_{kl}^{2m} + \mu_{kl}^{2m}). \quad (11)$$

Сопоставляя (10) и (11), устанавливаем справедливость (8), а следовательно, и теоремы.

3. Построим итерационный процесс для нахождения решения (4), (5). Пусть дано какое-то приближение $v^{(n)}$. Следующее приближение будем получать из

$$M_h u^{(n+1)} = M_h v^{(n)} - \tau (L_h v^{(n)} - f), \quad (12)$$

где τ — итерационный параметр. Для погрешности $e^{(n)} = u - v^{(n)}$, $e^{(n+1)} = u - u^{(n+1)}$ имеем

$$M_h e^{(n+1)} = (M_h^* - \tau L_h) e^{(n)}; \quad e^{(n)} = 0 \text{ на } S_h^*. \quad (13)$$

Так как $M_h = M_h^*$, $(M_h - \tau L_h)^* = M_h - \tau L_h$ и M_h — положительно определенный оператор, то существует система функций $\{\psi_i\}$, удовлетворяющих (4) и образующих ортонормированный базис в метрике $\|\psi\|_M$ $= (M_h \psi, \psi)$, таких, что

$$(M_h - \tau L_h^*) \psi_i = \lambda_i M \psi_i; \quad (M \psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (14)$$

Так как

$$(\psi, \psi) \leq k_1 (M \psi, \psi), \quad (15)$$

где k_1 не зависит от h , то $\{\psi_i\}$ полна и в обычной метрике.

$$e^{(n+1)} = \sum_i d_i^{(n+1)} \psi_i; \quad e^{(n)} = \sum_i d_i^{(n)} \psi_i.$$

Подставляя эти разложения в (13), получим $d_i^{(n+1)} = d_i^{(n)} \lambda_i$. Из (14)

$$\lambda_i = [(M_h - \tau L_h^*) \psi_i, \psi_i] = 1 - \tau (L_h \psi_i, \psi_i). \quad (16)$$

По теореме 2 $m_0 \leq (L_h^* \psi_i, \psi_i) \leq M_0$, поэтому можно найти такие $\tau > 0$ и $0 < q < 1$, не зависящие от h и ψ_i , что $-q \leq 1 - \tau M_0 \leq 1 - \tau (L_h \psi_i, \psi_i) \leq \leq 1 - \tau m_0 \leq q$ или же

$$\frac{1-q}{m_0} \leq \tau \leq \frac{1+q}{M_0}. \quad (17)$$

Тогда

$$|d_i^{(n+1)}| \leq q |d_i^{(n)}|; \quad \|u - u^{(n+1)}\|_{M'} \leq q \|u - v^{(n)}\|_M. \quad (18)$$

Но решать уравнение (12) мы тоже вынуждены приближенно, и поэтому будем всегда получать некоторое $v^{(n+1)}$, а не $u^{(n+1)}$.

Уравнение (12) будем решать по методу переменных направлений, беря $v^{(n)}$ в качестве начального приближения для $u^{(n+1)}$ *. Тогда, как установлено в (10), для того чтобы

$$\|u^{(n+1)} - v^{(n+1)}\| \leq \varepsilon_1 \|v^{(n)} - u^{(n+1)}\|, \quad (19)$$

достаточно произвести $\sim \ln \varepsilon_1 \ln h$ итераций, число производимых при этом арифметических действий будет порядка $h^{-2} \ln h \ln \varepsilon_1$.

* На целесообразность выбора такого начального приближения мне указал Н. С. Бахвалов.

Так как $\|\psi\|_M \leq \frac{c_2}{h^{2m}} \|\psi\|$, где c_2 не зависит от h , то из (19)

$$\begin{aligned} \|u^{(n+1)} - v^{(n+1)}\|_M &\leq \frac{c_2}{h^{2m}} \|u^{(n+1)} - v^{(n+1)}\| \leq \frac{c_2 \varepsilon_1}{h^{2m}} \|v^{(n)} - u^{(n+1)}\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_1 c_3}{h^{2m}} \|v^{(n)} - u^{(n+1)}\|_M, \end{aligned} \quad (20)$$

т. е.

$$\|u^{(n+1)} - v^{(n+1)}\|_M \leq \frac{\varepsilon_1 c_3}{h^{2m}} \|v^{(n)} - u^{(n+1)}\|_M$$

(c_3 не зависит от h).

Возьмем $\varepsilon_1 = h^{2m} q_1 / c_3$, где $q_1 > 0$ — число, не зависящее от h такое, что $q + q_1 q + q_1 = r < 1$. (20) перепишется как

$$\|u^{(n+1)} - v^{(n+1)}\|_M \leq q_1 \|v^{(n)} - u^{(n+1)}\|_M. \quad (21)$$

Используя (18) и (21):

$$\begin{aligned} \|u - v^{(n+1)}\|_M &\leq \|u - u^{(n+1)}\|_M + \|u^{(n+1)} - v^{(n+1)}\|_M \leq \\ &\leq q \|u - v^{(n)}\|_M + q_1 \|v^{(n)} - u^{(n+1)}\|_M \leq \\ &\leq q \|u - v^{(n)}\|_M + q_1 \|u - u^{(n+1)}\|_M + q_1 \|u - v^{(n)}\|_M \leq \\ &\leq q \|u - v^{(n)}\|_M + q q_1 \|u - v^{(n)}\|_M + q_1 \|u - v^{(n)}\|_M = \\ &= (q + q_1 q + q_1) \|u - v^{(n)}\|_M = r \|u - v^{(n)}\|_M. \end{aligned}$$

Таким образом, хотя мы и не находим точно $u^{(n+1)}$, а получаем только $v^{(n+1)}$ — некоторое приближение для $u^{(n+1)}$, но сходимость в метрике M все-таки получается со скоростью сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $r < 1$, и чтобы получить $\|v^{(n+1)} - u\|_M \leq \varepsilon \|v^{(0)} - u\|_M$ достаточно $\sim \ln \varepsilon$ итераций вида (12). Так как на каждую такую итерацию приходится $\sim \ln h \ln \varepsilon$ итераций вида (12). Так как на каждую такую итерацию приходится $\sim \ln h \ln \varepsilon$ итераций по методу переменных направлений, то всего будет $\sim \ln^2 h \ln \varepsilon$ итераций с числом арифметических действий $\sim h^{-2} \ln^2 h \ln \varepsilon$.

Учитывая (15), убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Теорема 3. Итерационный процесс (12), где на каждом шаге за начальное приближение для $u^{(n+1)}$ берется $v^{(n)}$ и производится сокращение ошибки по методу переменных направлений в ε_1 раз, для нахождения решения (4), (5) с точностью ε , требует $\sim h^{-2} \ln^2 h \ln \varepsilon$ арифметических действий.

З а м е ч а н и е. Основные результаты работы могут быть перенесены на многомерный случай.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. С. Бахвалов, ДАН, 113, № 2 (1957). ² Н. С. Бахвалов, ДАН, 114, № 2 (1957). ³ Н. С. Бахвалов, ДАН, 114, № 3 (1957). ⁴ D. W. Peaceman, H. H. Rachford, J. Soc. Ind. Appl. Math., 3, 28 (1955). ⁵ J. Douglas, H. H. Rachford, Trans. Am. Math. Soc., 82, 421 (1956). ⁶ G. Birkhoff, R. Varga, Trans. Am. Math. Soc., 92, 13 (1959). ⁷ В. К. Саульев, Вычислительная математика, № 1 (1957). ⁸ Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви, УМН, в. 8, 125 (1940). ⁹ О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М.—Л., 1953. ¹⁰ Е. Г. Дьяконов, ДАН, 138, № 2 (1961).

И. И. ИБРАГИМОВ и Р. Г. МАМЕДОВ

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 I 1961)

Пусть $Q_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ — полином степени n .

С. Н. Бернштейном ⁽¹⁾ доказано следующее утверждение:

Если $|Q_n(z)| \leq 1$ при $|z| \leq 1$, то справедливо неравенство $|Q'_n(z)| \leq n$ при $|z| = 1$.

Пусть

$$\|Q_n(re^{i\varphi})\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |Q_n(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}^{1/p}.$$

Нетрудно показать (например, см. ⁽⁵⁾), что при любом $p \geq 1$ имеют место неравенства

$$\|Q_n(Re^{i\varphi})\|_p \leq R^n \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p \quad (R > 1); \quad (1)$$

$$\|Q_n(\rho e^{i\varphi})\|_p \geq \rho^n \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p \quad (\rho < 1). \quad (2)$$

Для полиномов $Q_n(z)$, не имеющих нулей внутри единичного круга $|z| < 1$, де Бруйном ⁽⁴⁾ доказано следующее утверждение:

Теорема А. Если полином $Q_n(z)$ степени n не имеет нулей в $|z| < 1$, то при любом $p \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|Q'_n(e^{i\varphi})\|_p \leq \frac{n}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p. \quad (3)$$

В соотношении (3) знак равенства достигается только для полиномов вида $Q_n(z) = \lambda + \mu z^n$, где $|\lambda| = |\mu|$.

В этой заметке нами уточняются неравенства (1) и (2) для полиномов $Q_n(z)$ степени n , не имеющих нулей в $|z| < 1$.

Теорема 1. Если $Q_n(z)$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то при $p \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|Q_n(Re^{i\varphi})\|_p < \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} (R^n - 1) + 1 \right\} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p \quad (4)$$

для любого $R > 1$.

Доказательство. Пусть сперва $Q_n(z) \neq \lambda + \mu z^n$, где $|\lambda| = |\mu|$. Из очевидного неравенства

$$|Q_n(Re^{i\varphi})| \leq \int_1^R |Q'_n(re^{i\varphi})| dr + |Q_n(e^{i\varphi})|,$$

где φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) — любое число и $R > 1$, при любом $\rho \geq 1$, следует неравенство:

$$\|Q_n(Re^{i\varphi})\|_p \leq \int_1^R \|Q'_n(re^{i\varphi})\|_p dr + \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p.$$

Учитывая (1), последнее неравенство можно написать в виде

$$\|Q_n(Re^{i\varphi})\|_p \leq \|Q'_n(e^{i\varphi})\|_p \int_1^R r^{n-1} dr + \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p.$$

Отсюда по теореме А следует, что

$$\|Q_n(Re^{i\varphi})\|_p < \left\{ \frac{n}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} \frac{R^n - 1}{n} + 1 \right\} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p,$$

т. е. справедливо (4).

Остается проверить справедливость (4) для полиномов вида $Q_n(z) = \lambda + \mu z^n$, где $|\lambda| = |\mu|$. Это следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|\lambda + \mu e^{i\varphi n} R^n\|_p &< (R^n - 1) |\mu| (2\pi)^{1/p} + \|\lambda + \mu e^{i\varphi n}\|_p = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} (R^n - 1) + 1 \right\} \|\lambda + \mu z^n\|_p. \end{aligned}$$

В случае $\rho = \infty$ теорема 1 доказана Анкени и Ривлиным ⁽³⁾, а в случае $\rho = 1$ Раманом ⁽⁵⁾.

Теорема 2. Если $Q_n(z)$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то существует положительное число δ такое, что при $(1 - \delta) < \rho < 1$ справедливо неравенство

$$\|Q'_n(\rho e^{i\varphi})\|_p > \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} (1 - \rho^n) \right\} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p, \quad (5)$$

где $\rho \geq 1$ — любое число.

Доказательство. Справедливость неравенства (5) для полиномов $Q_n(z) = \lambda + \mu z^n$, где $|\lambda| = |\mu|$, не имеющих нулей в $|z| < 1$, проверяется непосредственно. В самом деле,

$$\begin{aligned} \|\lambda + \mu \rho^n e^{i\varphi n}\|_p &> \|\lambda + \mu e^{i\varphi n}\|_p - (1 - \rho^n) |\mu| (2\pi)^{1/p} = \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} (1 - \rho^n) \right\} \|\lambda + \mu e^{i\varphi n}\|_p, \end{aligned}$$

т. е. справедливо (5).

Теперь докажем теоремы для полиномов $Q_n(z) \neq \lambda + \mu z^n$ степени n , где $|\lambda| = |\mu|$, не имеющих нулей в $|z| < 1$. Для доказательства предположим противное, т. е. что (5) не имеет места. Это означает, что существует полином $Q_n(z) \neq \lambda + \mu z^n$ ($|\lambda| = |\mu|$) степени n , не имеющий нулей $|z| < 1$, и последовательность значений $1 - \delta < \rho_m < 1$ ($m = 1, 2, \dots$) $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 1$ такая, что

$$\|Q_n(\rho_m e^{i\varphi})\|_p \leq \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} (1 - \rho_m^n) \right\} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|Q'_n(e^{i\varphi})\|_p &= \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_n(e^{i\varphi}) - Q_n(\rho_m e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - \rho_m e^{i\varphi}} \right\|_p \geq \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \rho_m} (\|Q_n(e^{i\varphi})\|_p - \|Q_n(\rho_m e^{i\varphi})\|_p). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (6), имеем

$$\begin{aligned} \|Q'_n(e^{i\varphi})\|_p &\geq \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho_m^n}{1 - \rho_m} = \\ &= \frac{n}{2} \left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 p + 1)}{\Gamma(1/2(p+1))} \right]^{1/p} \|Q_n(e^{i\varphi})\|_p, \end{aligned}$$

что противоречит теореме А. Таким образом, неравенство (5) доказано также для всех $Q_n(z) \neq \lambda + \mu z^n$, где $|\lambda| = |\mu|$. При $p = \infty$ из теоремы 2 следует, что если $Q_n(z)$ не имеет нулей в $|z| < 1$ и $\max_{|z|=1} |Q_n(z)| = 1$, то существует положительное число $\delta > 0$ такое, что

$$\max_{|z|=\rho} |Q_n(z)| \geq \frac{1 + \rho^n}{2}$$

при $1 - \delta < \rho < 1$.

При $p = 1$ из теоремы 2 следует одна теорема Рамана (5).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР

Поступило
5 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1947. ² P. D. Lax, Bull. Am. Math. Soc., **50**, 509 (1944). ³ N. C. Ankeny, T. J. Rivlin, Pacif. J. Math., **5**, 849 (1955). ⁴ N. G. de Bruijn, Nederl. Akad. Proc., **50**, 1265 (1947). ⁵ Q. J. Rahman, Proc. Am. Math. Soc., **10**, 800 (1959).

Д. Л. КЕЛЕНДЖЕРИДЗЕ

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 21 I 1961)

1⁰. Постановка задачи*. Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ — точки действительного n -мерного фазового пространства R^n , уравнения движения которых имеют соответственно вид:

$$\dot{x} = f(x, u) = (f^1(x, u), \dots, f^n(x, u)); \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(y, v) = (g^1(y, v), \dots, g^n(y, v)), \quad (2)$$

где $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ — вектор, управляющий движением точки x ; $v = v(t) = (v^1(t), \dots, v^s(t))$ — вектор, управляющий движением точки y . Управление $u(t)$ выбирается в классе кусочно-непрерывных вектор-функций, принимающих значения в заданном множестве Ω^r r -мерного векторного пространства, а управление $v(t)$ — в классе кусочно-непрерывных вектор-функций со значениями в некотором множестве Ω^s s -мерного векторного пространства. Такие управления будем называть допустимыми. Функции $f(x, u)$, $g(y, v)$ предполагаются непрерывно зависящими от аргументов (x, u) , (y, v) и непрерывно дифференцируемыми по всем координатам точек x , y соответственно. Точку x назовем преследующей точкой, точку y — преследуемой точкой.

Пусть для любого допустимого уравнения $\dot{x}(t)$ и заданных начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (3)$$

существует такое допустимое управление $u(t)$, что траектории $x(t)$, $y(t)$ уравнений (1), (2), соответствующие этим управлениям и начальным значениям (3), удовлетворяют условию $x(t_1) = y(t_1)$ для некоторого момента времени $t_1 > 0$. Будем считать, что для выбранных $u(t)$, $v(t)$ равенство $x(t) = y(t)$ невозможно при $0 \leq t \leq t_1$. Величину $T_{uv} = t_1$ (зависящую от выбранных управлений $u(t)$, $v(t)$) назовем временем преследования. В дальнейшем будем предполагать, что начальные условия (3) фиксированы.

Если управление $v(t)$ преследуемой точки выбрано, то преследующей точкой следует управлять таким образом, чтобы соответствующее время преследования T_{uv} принимало минимальное значение. Положим, что при любом допустимом выборе $v(t)$ этот минимум достигается при некотором $u(t)$. Обозначим его через $T_v = \min T_{uv}$. Преследуемая точка должна выбирать допустимое управление $u(t)$, максимизирующее величину T_v . Этот максимум, если он существует, обозначим через $T = \max_v \min_u T_{uv}$.

* Работа выполнена в семинаре Л. С. Понтрягина по теории колебания и автоматического регулирования.

Наша задача состоит в выборе таких управлений $u(t), v(t)$, чтобы для соответствующего времени преследования T_{uv} выполнялось равенство $T_{uv} = T$. Такую пару управлений $u(t), v(t)$ назовем оптимальной парой управлений, соответствующие им траектории — оптимальной парой траекторий.

Теорема, доказанная в настоящей заметке, дает полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая оптимальная пара траекторий при одном дополнительном предположении, что уравнение (1) является линейным, не вырожденным, а множество Ω^r — выпуклым замкнутым многогранником r -мерного пространства (см. (1, 2)). Таким образом, уравнение (1) имеет вид

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu, \quad (4)$$

где A — линейный оператор, действующий в R^n ; B — линейный оператор, переводящий Ω^r в R^n .

2°. Пусть $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ — два произвольных ковариантных вектора пространства R^n . Введем скалярную функцию 6 векторных аргументов ψ, x, u, χ, y, v :

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, \chi, y, v) &= \sum_{\alpha=1}^n [\psi_\alpha f^\alpha(x, u) + \chi_\alpha g^\alpha(y, v)] = \\ &= \psi \cdot f(x, u) + \chi \cdot g(y, v). \end{aligned}$$

Теорема. Пусть $u(t), v(t)$ — оптимальная пара управлений, $x(t), y(t)$ — соответствующая оптимальная пара траекторий уравнений (4), (2) и T — время преследования; тогда существуют такие непрерывные ненулевые ковариантные вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, $\chi(t) = (\chi_1(t), \dots, \chi_n(t))$, $0 \leq t \leq T$, что функции $\psi(t), x(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\dot{x}^i = f^i(x, u) = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = - \frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а функции $\dot{\chi}(t), y(t)$ — гамильтоновой системе

$$\dot{y}^i = g^i(y, v) = \frac{\partial H}{\partial \chi_i}, \quad \dot{\chi}_i = - \frac{\partial H}{\partial y^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для любых t на отрезке $0 \leq t \leq T$ гамильтонова функция

$$\begin{aligned} H(t) &= H(\psi(t), x(t), u(t), \chi(t), y(t), v(t)) = \\ &= \max_{u \in \Omega^r} \min_{v \in \Omega^s} H(\psi, x, u, \chi, y, v), \end{aligned} \quad (5)$$

причем $H(t) = \text{const} \geq 0$ и в момент $t = T$ выполняется равенство $\psi(T) = -\chi(T)$.

3°. **Доказательство.** Мы будем вести доказательство для случая, когда в начальных данных (3) $x(0) = x_0 = 0$, т. е. для случая, когда преследуемый объект выходит из нуля. Кроме того будем предполагать, что множество Ω^r содержит начало координат. Легко показать, что эти допущения не ограничивают общности.

Обозначим через M_T множество точек фазового пространства R^n , куда можно попасть из начала координат за время $\leq T$, двигаясь по траекториям уравнения (4) при помощи допустимых управлений. Через Σ_T обозначим границу этого множества. Из результатов работ (1, 2) следуют перечисленные ниже свойства множеств M_T, Σ_T . M_T — компактное выпуклое множество, содержащее внутренние точки, следовательно, M_T гомеоморфно

n -мерному шару, Σ_T — $(n - 1)$ -мерной сфере. Σ_T состоит из тех и только тех точек, куда можно попасть из начала координат за время $\geq T$. Множество M_T при любом T может быть представлено как гомеоморфный образ прямого произведения $(n - 1)$ -мерной сферы S^{n-1} на отрезок $0 \leq t \leq T$, причем этот гомеоморфизм отображает нижнее основание $O \times S^{n-1}$ прямого произведения в начале координат, а множество $t \times S^{n-1}$ — на Σ_t , $0 \leq t \leq T$.

Через M обозначим теоретико-множественное объединение множеств M_t , $0 \leq t \leq \infty$, $M = \bigcup_{t=0}^{\infty} M_t$. Очевидно, M — открытое множество.

Пусть $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t \leq T$, — оптимальная пара управлений; $x(t)$, $y(t)$ — соответствующая оптимальная пара траекторий; T — время преследования. Так как M — открытое множество, то найдется такая возрастающая последовательность времен $t_i \rightarrow T$, $i \rightarrow \infty$, что все точки $y(t_i) \in M$. Из перечисленных выше свойств множеств Σ_T следует, что $y(t_i) \in \Sigma_{\tau_i}$, где $\tau_i > t_i$ и $\tau_i \rightarrow T$ при $i \rightarrow \infty$. Через точку $y(t_i)$ проведем опорную гиперплоскость к M_{τ_i} , и пусть φ^i — вектор, ортогональный к этой гиперплоскости, направленный в противоположную от M_{τ_i} сторону. Выберем из последовательности векторов φ^i сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим через φ . Чтобы не изменять обозначений, предположим, что сходится сама последовательность φ^i . Так как $x(t_i) \in \Sigma_{t_i}$, $y(t_i) \in \Sigma_{\tau_i}$, где $\tau_i > t_i$ и M_{τ_i} содержит M_{t_i} строго внутри себя, то $\varphi^i \cdot (y(t_i) - x(t_i)) > 0$. Рассмотрим функции $\Phi^i(t) = \varphi^i \cdot (y(t) - x(t))$, $\Phi(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi^i(t)$. В силу очевидных свойств функции

$\Phi(t)$ заключаем $\dot{\Phi}(T) \leq 0$ или $\varphi \cdot (f(T) - g(T)) \geq 0$. Из этого неравенства следует, что точка $x(T) = y(T)$ является граничной точкой выпуклого замыкания D множества M_T и вектора $g(T) - f(T)$.

Пусть $\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon \delta y(t) + \varepsilon O(\varepsilon)$ — произвольная варьированная траектория уравнения (2) с начальным значением (3). Время преследования варьированной траектории обозначим через $T_i = T - \delta T(\varepsilon_i)$, где $\delta T(\varepsilon_i) \geq 0$ и $\delta T(\varepsilon_i) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Через точку $y(T_i) \in M_{\sigma_i}$ проведем опорную гиперплоскость к M_{σ_i} , и пусть ξ^i — вектор, ортогональный к этой гиперплоскости, направленный в противоположную от M_{σ_i} сторону. Предел сходящейся подпоследовательности ξ^i обозначим через ξ . Точка $\tilde{y}_i(T_i) \in \Sigma_{T_i}$, и так как $\sigma_i \geq T_i$, то $\xi^i \cdot (\tilde{y}_i(T_i) - y(T_i)) \leq 0$. Переходя к пределу, получим

$$\xi \cdot \delta y(T) \leq 0. \quad (6)$$

Из полученного неравенства следует, что точка $x(-T) = y(T)$ является граничной точкой выпуклого замыкания E множества D и конуса достижимости K для траектории $y(t)$ (см. (3)). Обозначим через ψ вектор, ортогональный к опорной гиперплоскости к множеству E в точке $x(T) = y(T)$ и направленный в противоположную от E сторону. Примем ψ за граничное значение функции $\psi(t)$, $0 \leq t \leq T$: $\psi(T) = \psi$, а граничное значение функции $\chi(t)$, $0 \leq t \leq T$, определим равенством $\chi(T) = -\psi$. Эти условия однозначно определяют $\psi(t)$, $\chi(t)$, $0 \leq t \leq T$, из систем $\dot{\psi}_i = -\partial H / \partial x^i$, $\dot{\chi}_i = -\partial H / \partial y^i$, $i = 1, \dots, n$. Найденные таким образом функции $\psi(t)$, $\chi(t)$ удовлетворяют сформулированной выше теореме.

В самом деле, гиперплоскость, проведенная через точку $y(T)$ и ортогональная к вектору ψ , является опорной к множеству M_T . Отсюда следует (см. (1)), что на всем отрезке $0 \leq t \leq T$ выполняется условие максимума

$$\psi(t) \cdot f(x(t), u(t)) = \max_{u \in \Omega^r} [\psi(t) \cdot f(x(t), u)],$$

и, следовательно,

$$H(t) = \max_{u \in \Omega'} H(\psi(t), x(t), u, \chi(t), y(t), v(t)).$$

Условие минимума в равенстве (5) следует из включения $K \subset E$ (см. (3)).

Наконец, нетрудно показать, что на всем отрезке $0 \leq t \leq T$ функция $H(t) = \text{const} \geq 0$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
13 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. В. Гамкрелидзе, ДАН, 116, № 1, 9 (1957). ² Л. С. Понтрягин, УМН, 14, в. 1, 3 (1950). ³ В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 3—42 (1960).

Э. И. КРУПИЦКИЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛИНОМОВ,
НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ДВУХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 I 1961)

1. Целью настоящей заметки является нахождение и исследование полиномов с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющихся от нуля на двух интервалах $[-1, -\lambda]$ и $[\lambda, 1]$ с весом $q(x) = \sqrt{1-x^2}$. Подобного рода полиномы, но для постоянного веса $q(x) = 1$, были построены и исследованы Н. И. Ахиезером^(1, 2) и являются обобщением на случай двух интервалов полиномов Чебышева первого рода $T_n(x)$. В отличие от них, полиномы, рассматриваемые ниже, являются соответствующим обобщением полиномов Чебышева второго рода $U_n(x)$. Следуя указанной аналогии, будем называть их полиномами Ахиезера второго рода и обозначать через $B_n(x, \lambda)$. При этом полиномы $B_n(x, \lambda)$ будут определяться как полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля на двух интервалах $[-1, -\lambda]$ и $[\lambda, 1]$ с весом $\sqrt{1-x^2}$ при условии, что

$$\max_{x \in [\pm\lambda, \pm 1]} |\sqrt{1-x^2} B_n(x, \lambda)| = 1.$$

Переходя к построению полиномов $B_n(x, \lambda)$, заметим, что случаи четного и нечетного n существенно различаются.

1. Случай четного $n = 2m$. В этом случае искомый полином строится элементарно. Действительно, рассмотрим функцию

$$y_{2m}(u) = \sqrt{1-u^2} U_{2m}(u), \quad -1 \leq u \leq +1, \quad (1)$$

где $U_{2m}(u)$ — полином Чебышева второго рода степени $2m$, нормированный таким образом, что $\max_{u \in [-1, 1]} |\sqrt{1-u^2} U_{2m}(u)| = 1$. Функция $y_{2m}(u)$ является экстремальной на отрезке $[-1, 1]$ в классе функций вида $\sqrt{1-u^2} P_{2m}(u)$, где $P_{2m}(u)$ — полином степени $2m$.

Используя преобразование

$$u = \sqrt{\frac{x^2 - \lambda^2}{1 - \lambda^2}}, \quad (2)$$

получим

$$B_{2m}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} U_{2m}\left(\sqrt{\frac{x^2 - \lambda^2}{1 - \lambda^2}}\right). \quad (3)$$

Для предельных значений $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ имеем

$$B_{2m}(x, 0) = U_{2m}(x); \quad (4)$$

$$B_{2m}(x, 1) = (1-x^2)^m. \quad (5)$$

С помощью полинома (3) решается следующая:

Задача 1. Среди всех полиномов степени $2m$ с равным единице старшим коэффициентом найти тот, который наименее уклоняется от нуля на двух интервалах $[-1, -\lambda]$ и $[\lambda, 1]$ с весом $\sqrt{1-x^2}$.

Искомый полином будет

$$\dot{B}_{2m}(x, \lambda) = \frac{L_{2m}}{\sqrt{1-\lambda^2}} U_{2m} \left(\sqrt{\frac{x^2 - \lambda^2}{1-\lambda^2}} \right), \quad (6)$$

где соответствующее минимальное уклонение L_{2m} определяется выражением

$$L_{2m} = \frac{(1-\lambda^2)^{m+1/2}}{2^{2m}}. \quad (7)$$

II. Случай нечетного $n = 2m - 1$. Составим, прежде всего, дифференциальное уравнение для функции

$$y_{2m-1}(x) = \sqrt{1-x^2} B_{2m-1}(x, \lambda). \quad (8)$$

В соответствии с общей теорией, функция $y_{2m-1}(x)$ должна на каждом из стрезков $[-1, -\lambda]$ и $[\lambda, 1]$ m раз достигать своего максимального значения, равного единице, последовательно меняя знак. Следовательно, полином

$$Q_{4m}(x) = [y_{2m-1}(x)]^2 - \frac{1}{2} \quad (9)$$

должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1/4 - [Q_{4m}(x)]^2}{(1-x^2)(x^2-\gamma^2)(x^2-\lambda^2)} = \frac{[Q'_{4m}(x)]^2}{(4m)^2(x^2-\delta^2)^2}, \quad 0 < \gamma \leq \delta \leq \lambda < 1, \quad (10)$$

так как функция $1/4 - [Q_{4m}(x)]^2$ имеет простые нули в точках $x = \pm \gamma$, $x = \pm \lambda$, $x = \pm 1$, а также двойные нули в $4m - 3$ точках интервала $[-1, 1]$, где $Q'_{4m}(x)$ также имеет простые нули. Кроме того, $Q'_{4m}(x)$ имеет еще два простых нуля в точках $x = \pm \delta$, где функция $Q_{4m}(x)$ достигает абсолютного максимума на отрезке $[-1, 1]$.

В результате имеем уравнение

$$\frac{1 - [y_{2m-1}(x)]^2}{(1-x^2)(x^2-\gamma^2)(x^2-\lambda^2)} = \frac{[y'_{2m-1}(x)]^2}{(2m)^2(x^2-\delta^2)^2}, \quad (11)$$

решение которого получаем в виде

$$y_{2m-1}(x) = \sin [2m \varphi(x)]; \quad (12)$$

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x \frac{(d^2 - t^2) dt}{\sqrt{(1-t^2)(\gamma^2 - t^2)(\lambda^2 - t^2)}}, \quad (13)$$

где параметры γ и δ определяются с помощью условий $y_{2m-1}(0) = 0$, $y_{2m-1}(\pm \lambda) = \pm 1$ и $y_{2m-1}(\pm \gamma) = \pm 1$. Практически удобнее перейти к выражению $y_{2m-1}(x)$ в параметрической форме через эллиптические функции. Следуя методу Н. И. Ахиезера (1), полагая

$$x^2 = \frac{\operatorname{sn}^2(K/2m) \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2(K/2m) - \operatorname{sn}^2 u}; \quad \operatorname{sn} \frac{K}{2m} = \lambda; \quad \lambda \sqrt{\frac{1-k^2}{1-k^2\lambda^2}} = \gamma \quad (14)$$

и учитывая, что функция $y_{2m-1}(x)$ имеет только два полюса кратности $2m-1$, соответствующие $x = \pm \infty$, находим

$$\varphi(u) = \frac{i}{2} \ln \frac{H(K/2m + u)}{H(K/2m - u)}; \quad (15)$$

$$\delta^* = \left[\lambda \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - k^2 \lambda^2}} \frac{H'_1(K/2m)}{H_1(K/2m)} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

где $H(u)$ и $H_1(u)$ — тэта-функции.

Окончательно имеем

$$y_{2m-1}(x) = \frac{i}{2} \left\{ \left[\frac{H(K/2m+u)}{H(K/2m-u)} \right]^m - \left[\frac{H(K/2m-u)}{H(K/2m+u)} \right]^m \right\}, \quad (17)$$

$$B_{2m-1}(x, \lambda) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{sn}^2 u - \lambda^2}{\operatorname{sn}^2 u - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 u}} \left\{ \left[\frac{H(K/2m+u)}{H(K/2m-u)} \right]^m - \left[\frac{H(K/2m-u)}{H(K/2m+u)} \right]^m \right\}; \quad (18)$$

$$\operatorname{sn} u = \lambda \sqrt{\frac{1 - x^2}{\lambda^2 - x^2}}; \quad \operatorname{sn} \frac{K}{2m} = \lambda. \quad (19)$$

Следует отметить, что функция (17) является решением уравнения (11), которому удовлетворяют также нечетные полиномы Ахиезера первого рода $A_{2m-1}(x, \lambda)$ ⁽³⁾.

При $0 < k < 1$ формулы (17) и (18) определяют экстремальные функции при $1 > \lambda > \sin(\pi/4m)$. При $0 \leq \lambda \leq \sin(\pi/4m)$ получаем

$$y_{2m-1}(x) = \sin(2m \arccos x) = \sqrt{1 - x^2} U_{2m-1}(x); \quad (20)$$

$$B_{2m-1}(x, \lambda) = U_{2m-1}(x),$$

а при $\lambda = 1$

$$B_{2m-1}(x, 1) = x(1 - x^2)^{m-1}. \quad (21)$$

С помощью полиномов $B_{2m-1}(x, \lambda)$ решается следующая:

Задача 2. Среди всех полиномов степени $2m - 1$ с равным единице старшим коэффициентом найти тот, который наименее уклоняется от нуля на двух интервалах $[-1, -\lambda]$ и $[\lambda, 1]$ с весом $\sqrt{1 - x^2}$.

С учетом (18) искомый полином будет

$$\dot{B}_{2m-1}(x, \lambda) = \frac{iL_{2m-1}}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{sn}^2 u - \lambda^2}{\operatorname{sn}^2 u - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 u}} \left\{ \left[\frac{H(K/2m+u)}{H(K/2m-u)} \right]^m - \left[\frac{H(K/2m-u)}{H(K/2m+u)} \right]^m \right\}, \quad (22)$$

где минимальное уклонение L_{2m-1} определяется соотношением

$$L_{2m-1} = \frac{1}{2^{2m-1}} \left[\frac{\theta(0)\theta_1(0)}{\theta(K/2m)\theta_1(K/2m)} \right]^{2m}; \quad (23)$$

здесь $\theta(u)$ и $\theta_1(u)$ — соответствующие тэта-функции.

2. Путем использования построенных выше полиномов $B_{2m-1}(x, \lambda)$ легко решается следующая:

Задача 3. Среди всех тригонометрических многочленов вида

$$P_m(\varphi) = a_m \sin m\varphi + a_{m-1} \sin(m-1)\varphi + \dots + a_1 \sin \varphi \quad (24)$$

с заданным коэффициентом a_m найти тот, который наименее уклоняется от нуля на двух интервалах $[-\pi, -\varphi_0]$ и $[\varphi_0, \pi]$.

Действительно, полагая $x = \sin(\varphi/2)$, получим

$$y_{2m-1}(x) = P_m(2 \arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} a_k U_{2k-1}(x); \quad (25)$$

$$-1 \leq x \leq -\lambda; \quad \lambda \leq x \leq 1; \quad \lambda = \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Следовательно, экстремальная функция (25) определяется из условия

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} a_k U_{2k-1}(x) = (-1)^{m-1} l_m B_{2m-1}(x, \lambda). \quad (26)$$

Приравнявая коэффициенты при x^{2m-1} , найдем

$$l_m = 2^{2m-1} a_m B_{2m-1} = a_m \left[\frac{\theta(0) \theta_1(0)}{\theta(K/2m) \theta_1(K/2m)} \right]^{2m}. \quad (27)$$

Таким образом, искомым тригонометрический многочлен будет

$$P_m(\varphi, \varphi_0) = (-1)^{m-1} l_m \cos \frac{\varphi}{2} B_{2m-1} \left(\sin \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (28)$$

где l_m — минимальное уклонение, определяемое формулой (27). Для коэффициентов a_k имеем

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k-1} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} B_{2m-1}(x, \lambda) U_{2k-1}(x) dx = \\ &= (-1)^{k-1} k \sum_{p=k}^m \frac{b_p C_{2(p-k)}^k}{2^{2p-1} p}, \end{aligned} \quad (29)$$

где b_p — коэффициенты полинома $B_{2m-1}(x, \lambda)$.

Выражение (28) определяет экстремальный полином при $\pi/2m < \varphi_0 < \pi$. При $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/2m$, в соответствии с (20), имеем

$$P_m(\varphi, \varphi_0) = (-1)^{m-1} l_m \cos \frac{\varphi}{2} U_{2m-1} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right) = a_m \sin m\varphi, \quad (30)$$

а при $\varphi_0 = \pi$

$$P_m(\varphi, \pi) = 2^{2m-1} a_m \sin \varphi (1 - \cos \varphi)^{m-1}. \quad (31)$$

В заключение отметим, что соответствующая задача для многочлена

$$Q_m(\varphi) = a_m \cos m\varphi + a_{m-1} \cos (m-1) + \dots + a_0$$

решается аналогичным образом, но с использованием полинома

$$A_{2m}(x, \lambda) = T_{2m} \left(\sqrt{\frac{x^2 - \lambda^2}{1 - \lambda^2}} \right),$$

найденного Н. И. Ахиезером в работе (1).

Поступило
28 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. И. А х и е з е р, Изв. Казанск. физ.-матем. общ., **3**, в. 2, 3 (1928). ² Н. И. А х и е з е р, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947, стр. 303. ³ С. Н. Б е р н-ш т е й н, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 111 (1949).

И. М. МЕЛЬНИК

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 I 1961)

§ 1. Пусть D — область (конечная или бесконечная), ограниченная простым гладким контуром L , и $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — вещественные функции точек контура L , удовлетворяющие условию Гильдера, причем $a(t)$ и $b(t)$ не обращаются в нуль всюду на L . Предположим, что функция $\alpha(t)$ гомеоморфно и с сохранением направления обхода преобразует контур L в себя, имеет производную $\alpha'(t)$, удовлетворяющую условию Гильдера и отличную от нуля всюду на L ; выполняются условия

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad a(t)a[\alpha(t)] = b(t)b[\alpha(t)]. \quad (1)$$

Определить функцию

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

аналитическую в D и непрерывно продолжимую на контур L , вещественная и мнимая части которой удовлетворяют краевому условию

$$a(t)u[\alpha(t)] + b(t)v(t) = c(t) \quad \text{на } L. \quad (2)$$

Конечную область, ограниченную контуром L , будем обозначать D^+ , а бесконечную — через D^- . Всяду в настоящей заметке будем предполагать, что на L задано направление обхода, положительное относительно области D^+ и, следовательно, отрицательное относительно D^- .

Сформулированную задачу будем называть внутренней, если D — конечная область; внешней, если D — бесконечная область.

§ 2. Внутренняя задача. Предполагая, что D — конечная область, и пользуясь условиями (1), задачу (2) преобразуем к равносильной задаче

$$f^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{f^+(t)} + g(t) \quad \text{на } L, \quad (3)$$

где

$$G(t) = \frac{b(t)}{ia(t)}, \quad g(t) = \frac{c(t)b[\alpha(t)] + ia(t)c[\alpha(t)]}{a(t)b[\alpha(t)]}. \quad (4)$$

Для случая, когда D — круг, задача (3) рассматривалась Э. Г. Хасабо-вым (не опубликовано).

Рассмотрим сначала случай, когда краевое условие (3) имеет вид

$$f^+[\alpha(t)] = \overline{f^+(t)} + g(t). \quad (5)$$

Решение задачи (5) будем искать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad (6)$$

$\varphi(t)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Гельдера и такая, что

$$\varphi(t) + \overline{\varphi[\alpha(t)]} = 0. \quad (7)$$

На основании формул Сохоцкого и условия (7) из (6) получим интегральное уравнение Фредгольма

$$K\varphi \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{2i}{\tau'} \frac{\cos(r, n)}{r} \right) \varphi(\tau) d\tau = g(t),$$

где $r = |\tau - t|$; n — внутренняя нормаль к L в точке τ ; (r, n) — угол между направлениями $\overline{\tau t}$ и n ; $\tau' = d\tau/ds$; s — дуговая абсцисса.

Рассуждая аналогично тому, как это сделано в работе Д. А. Квеселова⁽¹⁾ при решении задачи Карлемана, можно показать, что однородное уравнение $K\varphi = 0$ не имеет нетривиальных решений. Следовательно, неоднородное уравнение $K\varphi = g(t)$ имеет единственное решение. Так как каждое интегрируемое решение уравнения $K\varphi = g(t)$ удовлетворяет условию Гельдера и обладает свойством (7), то соответствующая функция $f(z)$, определяемая формулой (6), является решением задачи (5).

Л е м м а. Если аналитическая в D^+ и непрерывно продолжимая на L функция $\Phi(z)$ удовлетворяет краевому условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \overline{\Phi^+(t)} \quad \text{на } L,$$

то она есть вещественная постоянная в D^+ .

Эта лемма остается справедливой и для функции $\Phi(z)$, аналитической в D^- , непрерывно продолжимой на L и удовлетворяющей краевому условию

$$\Phi^-[\alpha(t)] = \overline{\Phi^-(t)} \quad \text{на } L.$$

На основании леммы общее решение задачи (5) дается формулой

$$f(z) = A + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau,$$

где A — произвольная вещественная постоянная; $\varphi(t)$ — решение уравнения $K\varphi = g(t)$.

Учитывая, что $\text{Ind } G(t) = 0$, на основании сказанного получим, что общее решение задачи (3) и равносильной ей задачи (2) дается соотношением

$$f(z) = \left\{ A + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau \right\} e^{\Gamma(z)}, \quad (8)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad (8^*)$$

$\varphi(t)$ — решение уравнения $K\varphi = \ln \left\{ \frac{b(t)}{ia(t)} \right\}$; $\psi(t)$ — решение уравнения $K\psi = g(t) e^{-\Gamma[\alpha(t)]}$.

§ 3. В н е ш н я я з а д а ч а. Пусть теперь D — бесконечная область. Аналогично предыдущему рассмотрим сначала задачу

$$f^-[\alpha(t)] = \overline{f^-(t)} + g(t) \quad \text{на } L. \quad (9)$$

Решение последней задачи будем искать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau + ic, \quad (10)$$

где $\varphi(t)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Гельдера и соотношению (7); c — вещественная постоянная.

Пользуясь формулами Сохоцкого и условием (7), из (9) и (10) имеем

$$K^0 \varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{2i}{\tau'} \frac{\cos(r, n)}{r} \right) \varphi(\tau) d\tau = 2ic - g(t).$$

Можно показать, что уравнение $K^0 \varphi = 0$ имеет одно линейно независимое решение $\varphi(t) = b$, где b — постоянная.

Уравнение, союзное к $K^0 \varphi$,

$$K'^0 \psi \equiv \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{(\bar{t}')^2}{\tau - \bar{t}} \right) \psi(\tau) d\tau = 0$$

также имеет одно линейно независимое решение $\psi(t)$, отличное от тривиального, причем $\int_L \psi(t) dt \neq 0$. Рассуждая теперь аналогично предыдущему,

получим, что общее решение задачи (9) выражается соотношением

$$f(z) = A + ic + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau,$$

где $\varphi(t)$ — решение уравнения $K^0 \varphi = 2ic - g(t)$. Можно показать, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_L g(t) \psi(t) dt / \int_L \psi(t) dt \right\} = 0,$$

поэтому вещественная постоянная c определяется из соотношения

$$2ic \int_L \psi(t) dt = \int_L g(t) \psi(t) dt.$$

Пользуясь решением задачи (9), получим, что общее решение внешней задачи (3) или равносильной ей задачи (2) имеет вид

$$f(z) = \left\{ A + ic + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{r[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau \right\} e^{\Gamma(z)}; \quad (11)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau + im;$$

(t) — решение уравнения

$$K^0 a = -\ln \left\{ \frac{b(t)}{ia(t)} \right\} + 2im;$$

(t) — решение уравнения

$$K^0 \varphi = -g(t) e^{-\Gamma^{-}[\alpha(t)]} + 2ic;$$

вещественные постоянные m и c определяются из уравнений

$$2im \int_L \psi(t) dt = \int_L \ln \left\{ \frac{b(t)}{ia(t)} \right\} \psi(t) dt,$$

$$2ic \int_L \psi(t) dt = \int_L g(t) \psi(t) e^{-\Gamma^{-}[\alpha(t)]} dt.$$

Как в (8), так и в (11) выражение $Ae^{\Gamma(z)}$ является решением соответствующей однородной задачи.

4. Рассмотрим уравнение

$$a(t) u[\alpha(t)] - \frac{b(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma = c(t), \quad (12)$$

где $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\sigma}$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $\alpha(t)$ означают то же, что и в (2).

Решение уравнения (12) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Пользуясь формулой Гильберта

$$v(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tau) d\sigma,$$

решение уравнения (12) сведем к решению краевой задачи (2). Полагая

$$\int_0^{2\pi} v(\tau) d\sigma = 0, \quad (13)$$

из (12) получим внутреннюю краевую задачу (2) для аналитической в единичном круге функции $f(z) = u(z) + iv(z)$. Если решение $f(z)$ однородной задачи

$$a(t) u[\alpha(t)] + b(t) v(t) = 0 \quad (14)$$

удовлетворяет условию (13), то однородное уравнение

$$a(t) u[\alpha(t)] - \frac{b(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = 0 \quad (15)$$

имеет единственное решение

$$u(t) = A \operatorname{Re} e^{\Gamma^+(t)},$$

зависящее от одной вещественной произвольной постоянной A . Здесь функция $\Gamma^+(t)$ определяется формулой (8*). Если решение задачи (14) не удовлетворяет условию (13), то однородное уравнение (15) не имеет нетривиальных решений.

В случае, когда условие (13) не выполняется, неоднородное уравнение (12) имеет единственное решение

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left(A + \frac{1}{2} \psi[\alpha(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi[\alpha(\tau)]}{\tau-t} d\tau \right) e^{\Gamma^+(t)} \right\}, \quad (16)$$

где $\psi(t)$ означает то же, что и в соотношении (8); вещественная постоянная A определяется из условия

$$\operatorname{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(A + \frac{1}{2} \psi[\alpha(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi[\alpha(\tau)]}{\tau-t} d\tau \right) e^{\Gamma^+(t)} ds \right\} = 0.$$

Если решение задачи (14) удовлетворяет условию (13), то решение неоднородного уравнения (12) существует тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\operatorname{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\psi[\alpha(t)] + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi[\alpha(\tau)]}{\tau-t} d\tau \right) e^{\Gamma^+(t)} ds \right\} = 0,$$

и дается формулой (16).

Ростовский-на-Дону
государственный университет

Поступило
5 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. А. Квеселав, Тр. Тбилисс. матем. инст., 16, 40 (1948).

С. Г. МИХЛИН

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КЛАССАХ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 I 1961)

В настоящей заметке мы сохраняем терминологию и обозначения статей ^(1, 2).

1°. Цель настоящей заметки — установить достаточные условия, при которых решение (если оно существует) многомерного сингулярного интегрального уравнения

$$a(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy = g(x),$$

$$r = |y - x|, \quad \theta = \frac{y - x}{r}, \quad (1)$$

удовлетворяет условию Липшица с некоторым положительным показателем. Примем, что свободный член удовлетворяет следующему условию:

произведение $\left(\frac{1 + |x|^2}{2}\right)^{m/2} g(x) \in \text{Lip}_\alpha(\Sigma)$. Здесь Σ — сфера, в которую переходит эвклидово пространство E_m при стереографическом преобразовании. Из внешнего условия вытекает, в частности, что $g(x) \in L_2(E_m)$. Дело сводится к наложению достаточных условий на $a(x)$ и $f(x, \theta)$. Как обычно, мы примем, что символ уравнения (1) нигде не обращается в нуль.

Поставленную здесь задачу рассматривал Жиро ⁽³⁾, который, однако, исследовал весьма частный класс уравнений, характеристики которых суть сферические функции первого порядка.

Ниже мы воспользуемся следующей, по существу хорошо известной леммой.

Лемма. Пусть Ω — конечная область пространства E_m , и пусть в этой области функция $A(x, y)$ удовлетворяет неравенствам

$$|A(x, y)| \leq C, \quad |A(x + h, y) - A(x, y)| \leq N |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

где C, N, α — постоянные. Тогда интегральный оператор со слабой особенностью

$$v(x) = \int_{\Omega} \frac{A(x, y)}{r^\lambda} u(y) dy, \quad 0 \leq \lambda < m, \quad (3)$$

переводит любую ограниченную функцию $u(x)$ в функцию $v(x) \in \text{Lip}_\beta(\Omega)$, где $\beta = \min(\alpha, m - \lambda)$.

2°. Примем, что $a(x)$ и $f(x, \theta)$ в уравнении (1) удовлетворяют следующим требованиям:

- а) $a(x) \in C^{(1)}(\Sigma)$.
- б) $f(x, \theta) \in W_2^{(l)}(S)$, $l \geq m + 2$.
- в) Пусть $\omega(x, r, \theta)$ — произвольная функция своих аргументов. Обозначим через $\partial' \omega / \partial x_j$ производную, вычисленную в предположении, что

r и θ не зависят от x , и через $\partial''\omega/\partial x_j$ — производную, вычисленную в предположении, что только r и θ зависят от x , так что $\partial\omega/\partial x_j = \partial'\omega/\partial x_j + \partial''\omega/\partial x_j$.

Легко видеть, что справедлива формула вида

$$\frac{\partial''}{\partial x_j} \left[\frac{f(x, \theta)}{r^m} \right] = \frac{f_j(x, \theta)}{r^{m+1}}.$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{\partial' f(x, \theta)}{\partial x_j} \hat{\in} W_2^{(l-1)}(S), \quad f_j(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(l-1)}(S)$$

и чтобы эти функции, так же как и функция $f(x, \theta)$, были непрерывны на $\Sigma \times S$.

Из а) — в) вытекают следующие свойства:

г) $f(x', \theta) - f(x, \theta) = \rho'^\kappa F(\xi', \xi, \theta)$. Здесь ξ' и ξ — образы точек x' и x при стереографическом преобразовании; ρ' — расстояние между ξ' и ξ ; κ — постоянная, $0 < \kappa < 1$, и

$$|F(\xi_1, \eta_1, \theta) - F(\xi_2, \eta_2, \theta)| \leq N_1 (|\xi_1 - \xi_2|^\sigma + |\eta_1 - \eta_2|^\sigma),$$

$$N_1 = \text{const}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

д) $a(x') - a(x) = \rho'^\kappa a(\xi', \xi)$, $a(\xi', \xi) \in \text{Lip}_\sigma(\Sigma)$.

Из перечисленных здесь и в п. 1⁰ условий вытекает, что если функция $g(x)$ ортогональна ко всем решениям однородного уравнения, сопряженного с уравнением (1), то это последнее имеет решение (может быть, неединственное) в $L_2(E_m)$. Докажем, что при упомянутых условиях любое такое решение удовлетворяет условию $\left(\frac{1+|x|^2}{4}\right)^{m/2} u(x) \in \text{Lip}_\delta(\Sigma)$, где δ определяется данными задачи.

На основании результатов статьи (4), из условий б) и в) вытекает следующее: если характеристику разложить в ряд по сферическим функциям

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |a_n^{(k)}(x)|^2 \leq C_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l-2} \left| \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_j} \right|^2 \leq C_1, \quad C_1 = \text{const}.$$

Составим символ уравнения (1):

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta) &= a(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \gamma_{n,m} a_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta) = \\ &= a(x) + \int_S f(x, \theta') P(\cos \gamma) dS', \end{aligned}$$

где (5) $P(\cos \gamma) = \ln |\cos \gamma|^{-1} - \frac{i\pi}{2} \text{sign} \cos \gamma_x$ и γ — угол между радиусами сферы S , проведенными к точкам θ и θ' . Отсюда

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial a}{\partial x_j} + \int_S \frac{\partial' f(x, \theta)}{\partial x_j} P(\cos \gamma) dS'.$$

Таким образом, если $\partial' f(x, \theta)/\partial x_j$ рассматривать как характеристику, а $\partial a(x)/\partial x_j$ — как внеинтегральный коэффициент некоторого сингулярного оператора, то его символом будет функция $\partial' \Phi(x, \theta)/\partial x_j$; отсюда и из резуль-

татов статьи (4) вытекает, что $\partial' \Phi / \partial x_j \in W_2^{(l-1+[m/2])}(S)$. То же верно и для функции $\partial' \Phi^{-1} / \partial x_j = -\Phi^{-2} \partial' \Phi / \partial x_j$, поскольку $\inf |\Phi| > 0$.

Пусть теперь

$$\Phi^{-1}(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} b_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta).$$

Тогда, в силу тех же результатов статьи (4),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2(l-1+[m/2])} \left| \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial x_j} \right|^2 \leq C_2 = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l-3} |\gamma_{n,m}|^{-2} \left| \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial x_j} \right|^2 \leq C_3 = \text{const}.$$

Отсюда, во всяком случае вытекает, что $\text{grad}' \psi(x, \theta) \in W_2^{(l-2)}(S)$, где $\psi(x, \theta)$ — характеристика, соответствующая символу $\Phi^{-1}(x, \theta)$. Одновременно, как это опять вытекает из утверждения статьи (4), $\text{grad}'' \varphi(x, \theta) \in W_2^{(l-2)}(S)$. Так как $l-2 \geq m$, то, как это можно извлечь из теорем статьи (4), ряды, полученные дифференцированием ряда для функции $\varphi(x, \theta)$ по декартовым координатам точки θ , сходятся абсолютно и равномерно. Из формулы для символа вытекает, в силу условий б) и в), что функции $\Phi(x, \theta)$ и $\partial' \Phi(x, \theta) / \partial x_j$ непрерывны на $\Sigma \times S$. Но тогда на $\Sigma \times S$ непрерывны также $\Phi^{-1}(x, \theta)$ и $\partial' \Phi^{-1}(x, \theta) / \partial x_j$, а следовательно, и коэффициенты $b_n^{(k)}(x)$ и их производные по x_j . Но тогда

$$|\text{grad}'_{\xi} \varphi(x, \theta) \rho^{-m}| \leq C_4 \rho^{-m-1}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (4)$$

Здесь $\rho = |\xi - \eta|$, где ξ и η — образы точек x и y при стереографическом преобразовании. Используя соответствующую теорему Жиро (3), можно доказать, что сингулярный оператор

$$b_0^{(1)}(x) u(x) + \int_{E_m} L(x, x-y) u(y) dy, \quad L(x, x-y) = \frac{\varphi(x, \theta)}{r^m}, \quad (5)$$

переводит всякую функцию $u(x)$, удовлетворяющую условию

$$\left(\frac{1+|x|^2}{2} \right)^{m/2} u(x) \in \text{Lip}_{\alpha}(\Sigma), \quad (6)$$

в функцию, удовлетворяющую тому же условию.

30. Воздействуем на обе части уравнения (1) оператором (5), символ которого равен $\Phi^{-1}(x, \theta)$. Это приведет нас к уравнению типа Риса — Шаудера

$$u(x) + Tu = F(x), \quad (7)$$

которому удовлетворяют все решения уравнения (1). Из сказанного выше вытекает, что $F(x)$ удовлетворяет условию (6).

В уравнении (7) положим

$$\left(\frac{1+|x|^2}{2} \right)^{m/2} u(x) = \tilde{u}(\xi), \quad \left(\frac{1+|x|^2}{2} \right)^{m/2} = \tilde{F}(\xi), \quad \left(\frac{1+|x|^2}{2} \right)^{m/2} Tu = \tilde{T}\tilde{u},$$

тогда это уравнение переходит в следующее

$$\tilde{u}(\xi) + \tilde{T}u = \tilde{F}(\xi), \quad (8)$$

в котором оператор \tilde{T} вполне непрерывен в $L_2(\Sigma)$.

Можно доказать, что

$$\begin{aligned} \tilde{T}u = & \int_{\Sigma} \left\{ [a(y) - a(x)] \frac{\varphi(x, \theta)}{\rho^m} + \right. \\ & \left. + \int_{\Sigma} \frac{[f(z, \theta_{yz}) - f(x, \theta_{yz})] \varphi(x, \theta_{xz})}{|\xi - \eta|^m |\eta - \xi|^m} d\Sigma_{\eta} \right\} \tilde{u}(\eta) d\Sigma_{\eta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ξ — образ точки z при стереографическом преобразовании, $\theta_{yz} = \frac{z-y}{|z-y|}$, $\theta_{xz} = \frac{z-x}{|z-x|}$.

Из условий г) и д) и из результатов Жиро⁽³⁾ вытекает, что ядро оператора (9) удовлетворяет условиям леммы настоящей заметки. В частности, уравнение (8) есть интегральное уравнение со слабой особенностью. Функция $\tilde{F}(\xi) \in \text{Lip}_{\alpha}(\Sigma)$, тем более, ограничена, а тогда всякое решение уравнения (8), принадлежащее $L_2(\Sigma)$, ограничено. По лемме, $\tilde{T}u \in \text{Lip}_{\beta}(\Sigma)$, где β определяется условиями задачи, а тогда $\tilde{u} = (\tilde{F} - \tilde{T}u) \in \text{Lip}_{\delta}(\Sigma)$, $\delta = \min(\alpha, \beta)$.

4°. Результаты распространяются и на тот случай, когда уравнение имеет вид

$$a(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} K(\xi, \eta) u(\eta) d\Gamma_{\eta} = g(\xi), \quad g(\xi) \in \text{Lip}_{\alpha}(\Gamma),$$

где Γ — замкнутое достаточно гладкое многообразие m измерений, а ядро подчинено, например, такому условию: если некоторая окрестность точки $\xi \in \Gamma$ отображена достаточно гладким образом на некоторую область пространства E_m и если x и y суть образы точек ξ и η при таком преобразовании, то

$$K(\xi, \eta) = \frac{f(x, \theta)}{r^m} + \frac{f_0(x, y)}{r^{m-\lambda}},$$

где сингулярное ядро $r^{-m}f(x, \theta)$ удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, показатель $\lambda > 0$, а функция $f_0(x, y)$ непрерывно дифференцируема по координатам обеих точек x и y .

Распространение результатов на системы сингулярных уравнений очевидно.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
5 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Г. Михлин, Вестн. ЛГУ, № 1 (1956). ² С. Г. Михлин, ДАН, 131, № 5 (1960). ³ G. G i r a u d, Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., 51, fasc. 3 et 4, 251 (1934). ⁴ С. Г. Михлин, ДАН, 126, № 2 (1959). ⁵ A. P. C a l d e r o n, A. Z y g m u n d, Am. J. Math., 78, № 2 (1956).

А. М. ОЛЕВСКИЙ

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ИЗ L^2 ПО ПОЛНЫМ СИСТЕМАМ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 21 I 1961)

§ 1. Основное содержание заметки составляет следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная полная ортогональная в $L^2[0,1]$ система функций. Тогда существует функция $f(x) \in L^2[0,1]$, ряд Фурье которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

после некоторой перестановки членов расходится почти всюду (п. в.) на $[0,1]$.

В качестве непосредственного следствия из этой теоремы мы получаем отрицательный ответ на проблему существования полной ортонормированной системы безусловной сходимости.

Как известно, ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ называется системой сходимости, если из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty \quad (2)$$

вытекает сходимость ряда (1) п. в. на $[0,1]$. Если система $\{\varphi_n(x)\}$ остается системой сходимости при любой перестановке элементов, то она называется системой безусловной сходимости. Классическим примером такой системы является система Радемахера. Однако она, как и все другие известные системы безусловной сходимости, не полна. В связи с этим естественно возник вопрос ((⁶), стр. 452): существует ли полная система безусловной сходимости? Ответ на этот вопрос немедленно следует из теоремы 1. Именно, справедлива:

Теорема 2. Не существует полной ортонормированной системы безусловной сходимости.

Принципиальный смысл приведенных результатов состоит в том, что любую полную ортонормированную систему можно занумеровать в таком порядке $\{\varphi_n(x)\}$, что свойства этой системы будут достаточно плохими, именно, по ней будут существовать расходящиеся ряды из L^2 .

Следует отметить, что для тригонометрической системы теорема 1 впервые сформулирована А. Н. Колмогоровым в 1927 г. в его совместной с Д. Е. Меньшовым работе (¹). Недавно появилась работа Загорского (³), содержащая схему доказательства теоремы Колмогорова. Проведенный П. Л. Ульяновым анализ метода, предложенного Загорским, показал, что он применим и к некоторым другим системам. Грубо говоря, условием применимости метода Загорского является определенная «симметрия» функций системы. На этом пути П. Л. Ульянов (⁷) распространил утверждение теоремы А. Н. Колмогорова на системы Уолша и Хаара. В настоящей работе мы доказываем это утверждение для любой полной ортогональной системы*.

§ 2. Перейдем к доказательству теоремы 1.

* В этом же направлении получены результаты П. Л. Ульяновым (⁶), работа которого публикуется в настоящем номере.

I. Условимся относительно следующего определения. Пусть фиксирована натуральная последовательность $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_k, \dots\}$, $s_{k+1} > s_k$, $k = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ является Ω -безусловным базисом, если из условия (2) вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x), \quad \text{где } \sigma_k(x) = \sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} b_n \varphi_n(x), \quad (3)$$

сходится при любой перестановке членов на множестве положительной меры (зависящем от перестановки).

Результаты настоящего пункта можно сформулировать в виде леммы:

Лемма 1. Если существует полная ортонормированная система $\{\psi_v(x)\}$, являющаяся Ω -безусловным базисом (при какой-либо $\Omega = \{s_k\}$), то всякая ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ является Ω' -безусловным базисом при некоторой $\Omega' = \{m_i\}$ (зависящей от $\{\varphi_n\}$).

Для доказательства леммы мы используем одну идею Марцинкевича в том виде, как она изложена в (2), стр. 352—357. Именно, разлагая $\varphi_i(x)$ в ряды Фурье по системе $\{\psi_v(x)\}$ ($\varphi_i(x) \sim \sum a_{iv}^i \psi_v(x)$), строим последовательности $v(i)$, n_k , $u(i)$ так, как указано в (2). При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $v(i)$ является подпоследовательностью Ω . Далее, выбираем из n_k подпоследовательность m_i так, что $u(m_{i+1}) > v(m_i)$. Последовательность $\Omega' = \{m_i\}$ и есть искомая. Чтобы доказать это, представляем, так же как в (2), ряд (1) в виде суммы трех рядов. Далее, точно такими же оценками, как в (2), убеждаемся, что первый и третий из этих рядов абсолютно сходятся. Что же касается второго ряда, то объединяя в нем члены от номера $s_k + 1$ до s_{k+1} и обозначая эту сумму через $\sigma_k(x)$, по аналогии с (3), получаем ряд $\sum \sigma_k(x)$, который при любой перестановке сходится на множестве положительной меры.

Доказательство последнего утверждения также переносится из (3), с той лишь разницей, что вместо ссылки на теорему Колмогорова о тригонометрических рядах в нашем случае нужно сослаться на тот факт, что система $\{\psi_v(x)\}$, по условию, является Ω -безусловным базисом. Тем самым лемма будет полностью доказана.

II. Результат настоящего пункта можно рассматривать независимо от всего остального. Здесь выясняется одно любопытное свойство системы Хаара. Мы будем обозначать систему Хаара (см. (2), стр. 57), занумерованную в обычном порядке, через $\{\chi_v(x)\}$, $v = 0, 1, \dots$. Пусть фиксирована строго монотонно возрастающая натуральная последовательность $\Lambda = \{i_1, i_2, \dots\}$. Мы определим сейчас соответствующую ей последовательность $F(\Lambda)$ функций $\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$. Именно, полагаем

$$f_1(x) = 2^{-i_1/2} \sum_{v=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1} \chi_v(x).$$

Пусть теперь функции f_1, \dots, f_{k-1} уже определены. Обозначим через $E_n^{(1)}(\Lambda)$ — множество точек отрезка $[0, 1]$, где $f_n(x) > 0$, и через $E_n^{(2)}(\Lambda)$ — множество, где $f_n(x) < 0$. Через $\Phi_n^{(1)}(\Lambda, x)$ и $\Phi_n^{(2)}(\Lambda, x)$ обозначим соответственно характеристические функции этих множеств. Положим

$$f_k(x) = 2^{1/2([\log_2 k] - i_k)} \Phi_{[k/2]}^{(r)}(\Lambda, x) \sum_{v=2^{i_k}}^{2^{i_k+1}-1} \chi_v(x), \quad (4)$$

где $r = 1$, если k четно, и $r = 2$, если k нечетно.

Лемма 2. Пусть задана произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел Λ , и, в соответствии с (4), определена последова-

тельность функций $F(\Lambda)$. Тогда для любого n существует взаимно-однозначное* изометричное отображение U_n отрезка $[0, 1]$ на себя, при котором

$$f_k(x) = \chi_k(U_n x), \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1. \quad (5)$$

Доказательство. Следующие утверждения непосредственно получаются из данных выше определений.

1. Для любого k $f_k(x) = (-1)^{r+1} \cdot 2^{1/2[\log_2 k]}$, если $x \in E_k^{(r)}(\Lambda)$, и $f_k(x) = 0$ в остальных точках отрезка $[0, 1]$.

2. Множество $E_n^{(r)}(\Lambda)$ при любых Λ , n и r состоит из конечного числа непересекающихся интервалов.

3. $\text{mes } E_k^{(r)} = \mu_k$ зависит только от k и не зависит от Λ и r (этот факт легко проверяется по индукции).

Условимся говорить, что совокупность множеств $E_k^{(r)}(\Lambda)$ ($2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1$; $r = 1, 2$) суть множества ранга n .

Нетрудно проверить свойства:

4. При любых фиксированных Λ и n множества ранга n не пересекаются и в сумме дают почти весь отрезок $[0, 1]$.

5. При любом фиксированном Λ каждое множество ранга, меньшего n , состоит из конечного числа множеств ранга n .

Пусть теперь фиксированы Λ , Λ_1 и n . Тогда, в силу свойств 2 и 3, каждое множество $E_k^{(r)}(\Lambda)$ ранга n можно взаимно-однозначно, изометрично (с помощью кусочно-линейной функции) отобразить на соответствующее множество $E_k^{(r)}(\Lambda_1)$. Объединяя эти отображения, получаем, в силу 4, взаимно-однозначное, изометричное отображение отрезка $[0, 1]$ на себя, при котором для любых $k \leq 2^n - 1$ и $r \leq 2$ множество $E_k^{(r)}(\Lambda)$ взаимно-однозначно и изометрично отображается на $E_k^{(r)}(\Lambda_1)$. Последнее вытекает из свойства 5. В силу свойства 1 убеждаемся, что

$$f_k(x) = f_k^{(1)}(U_n x), \quad k \leq 2^n - 1 \quad (\text{где } \{f_k\} = F(\Lambda), \quad \{f_k^{(1)}\} = F(\Lambda_1)).$$

Для завершения доказательства леммы остается положить $\Lambda_1 = \{1, 2, \dots\}$ и заметить, что $F(\Lambda_1)$ в этом случае — система Хаара: $f_k^{(1)}(x) = \chi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Итак, лемма 2 доказана.

Из леммы 2 с помощью обычной техники (или ссылаясь на лемму нашей заметки (4)) получаем следующее утверждение:

Лемма 3. Пусть ряд $\sum a_k \chi_k(x)$ при некоторой перестановке членов расходится п. в. на $[0, 1]$. Тогда для любой Λ ряд $\sum a_k f_k(x)$ расходится п. в. на $[0, 1]$ при той же перестановке членов (здесь $\{f_k\} = F(\Lambda)$).

III. Лемма 4. Система Хаара не является Ω -безусловным базисом ни при какой Ω .

Доказательство. Мы будем пользоваться при доказательстве результатом П. Л. Ульянова (7) о существовании ряда Фурье из L^2

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x) \quad (6)$$

по системе Хаара, который расходится п. в. на $[0, 1]$ при некоторой перестановке членов. Итак, пусть фиксирована $\Omega = \{s_k\}$. Покажем, что система Хаара не является Ω -безусловным базисом. Очевидно, не ограничивая общности, можем считать Ω столь редкой, что для любого k найдется i_k такое, что $s_k < 2^{i_k} + 1 < 2^{i_k+1} < s_{k+1}$.

Поставим в соответствие каждому k однозначно число i_k так, чтобы выполнялось записанное неравенство. Очевидно, $i_{k+1} > i_k$. Тем самым опреде-

* Здесь и далее в доказательстве мы пренебрегаем конечным множеством точек — концами интервалов постоянства функций f_k и χ_k , $k < 2^n$.

лена последовательность $\Lambda = \{i_k\}$, а с ней и $F(\Lambda) = \{f_1(x), f_2(x), \dots\}$. Пусть $s_k \leq v < s_{k+1}$. Обозначим через Δ_v множество, на котором $\chi_v(x)$ отлична от нуля. Пусть, далее, $2^{i_k} \leq v \leq 2^{i_{k+1}} - 1$. Из (4) и свойства 5 предыдущего пункта следует, что в этом случае множество $E_k^{(1)}(\Lambda) \cup E_k^{(2)}(\Lambda)$ или содержит Δ_v или не пересекается с ним. Если имеет место первый случай, полагаем $b_v = 2^{1/2(\log_2 k) - i_k} a_k$. Для всех остальных v из полуинтервала $(s_k, s_{k+1}]$ полагаем $b_v = 0$. Тем самым полностью определена последовательность коэффициентов $\{b_v\}$, $v = 1, 2, \dots$. Рассмотрим ряд $\sum b_v \chi_v(x)$. Обозначим сумму отрезка этого ряда в пределах от $s_k + 1$ до s_{k+1} через $\sigma_k(x)$. Из (4) непосредственно ясно, что $\sigma_k(x) = a_k f_k(x)$. Учитывая расходимость ряда (6) при перестановке, в силу леммы 3, получаем, что ряд $\sum \sigma_k(x)$ при некоторой перестановке членов расходится п. в. на $[0, 1]$. Отметим, наконец, что из леммы 2 вытекает, что функции $f_k(x)$ ортонормированы в $L^2[0, 1]$. Учитывая, что ряд (6) сходится в L^2 , получаем, что ряд $\sum \sigma_k(x)$, а значит и (1) — ряды из L^2 . Следовательно, выполнено условие (2). Лемма 4 доказана.

Сопоставляя утверждения лемм 1 и 4, получаем, что ни при какой Ω не существует полной ортонормированной системы, являющейся Ω -безусловным базисом. В частности, при $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ получаем теорему 1. Итак, теорема 1, а с ней и 2 — полностью доказаны.

§ 3. Из теоремы 1, если учесть результаты С. Качмажа ((²), стр. 207) немедленно получаем следующее утверждение:

Теорема 3. В любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно так изменить порядок элементов, что функции Лебега полученной системы будут неограничены п. в. на $[0, 1]$.

Вместе с тем, используя метод нашей работы (⁵), можно получить теорему:

Теорема 4. Для любой последовательности $\omega(n) \rightarrow \infty$ существует полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что при любой перестановке ее элементов функции Лебега полученной системы удовлетворяют условию $L_n(x) = o(\omega(n))$.

Теоремы 3 и 4 дают полную информацию о поведении функций Лебега перестановок полных систем. Отметим еще следствие из теорем 1 и 4.

Теорема 5. Для того чтобы заданная положительная последовательность $\omega(n)$ была множителем Вейля для любой перестановки некоторой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(n) \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Теорему 1 можно усилить, заменив в ней расходимость ряда (1) после перестановки несуммируемостью любым наперед заданным методом $T(T^*)$. Этот факт вытекает непосредственно из теоремы 1, если применить к ней теорему 5 нашей работы (⁴).

Замечание 2. Вопрос о возможности усиления теоремы 1 в смысле замены условия $f(x) \in L^2$ на условие непрерывности (или хотя бы ограниченности) функции $f(x)$ остается открытым*.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Kolmogorof, D. Menchof, Math. Zs., 26, 432 (1927) ² С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958. ³ Z. Zahorski, C. R., 251, 501 (1960). ⁴ А. М. Олевский, ДАН, 125, № 2 (1959). ⁵ А. М. Олевский, ДАН, 133, № 5 (1960). ⁶ Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., 1960. ⁷ П. Л. Ульянов, ДАН, 137, № 4 (1961). ⁸ П. Л. Ульянов, ДАН, 138, № 3 (1961).

* *Примечание при корректуре.* В настоящее время нами получен положительный ответ на этот вопрос.

Л. И. РОНКИН

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУКРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 I 1961)

Пусть T — некоторая область в пространстве комплексных переменных z, w . Обозначим через A_T пространство функций $f(z, w)$, аналитических в области T . Сходимость последовательности элементов этого пространства определяется как равномерная сходимость в каждой области, лежащей строго внутри T . Если область T есть бицилиндр $\{|z| < R_1, |w| < R_2\}$, то, как известно, любой линейный функционал G в пространстве A_T определяется формулой

$$G(f) = \int_{|z|=R_1-\varepsilon} \int_{|w|=R_2-\varepsilon} f(z, w) g(z, w) dz dw \quad (1)$$

с функцией $g(z, w)$, аналитической в области $\{|z| > R_1 - 2\varepsilon, |w| > R_2 - 2\varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и зависит от G . Это соответствие между функционалами G и функциями $g(z, w)$ становится взаимно-однозначным, если потребовать, чтобы $g(\infty, \infty) = 0$.

В случае, когда T является полной n -круговой областью, общий вид функционала в пространстве A_T был получен С. Д. Окунем* и Л. А. Айзенбергом и Б. С. Митягиным⁽¹⁾. В этой заметке мы рассматриваем пространство функций, аналитических в полукруговой области**.

Пусть T — полная полукруговая область с плоскостью симметрии $w = 0$. По определению полукруговой области

$$T = \{z \in H_T; |w| < R_T(z)\},$$

где H_T — некоторая область в плоскости z , а $R_T(z)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная в области H_T . Как известно, каждая функция $f(z, w) \in A_T$ разлагается в ряд Гартогса

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k f_k(z).$$

При этом функции $f_k(z)$, аналитические в области H_T , удовлетворяют условию

$$\lim_{z' \rightarrow z} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k(z')|} \leq \frac{1}{R_T(z)}.$$

Рассматривая бицилиндр $\{|z| < R_1, |w| < R_2\}$ как полукруговую область, придадим формуле (1) несколько иную, более удобную для нас форму.

* Результаты С. Д. Окуня доложены на V Всесоюзной конференции по теории функций в г. Ереване.

** О полукруговых областях см., например, (2).

Для этого разложим функции $f(z, w)$ и $g(z, w)$ в ряды Гартогса

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k f_k(z), \quad g(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^{k-1} g_k(z).$$

Так как функции $f(z, w)$ и $g(z, w)$ голоморфны соответственно в бицилиндрах $\{|z| < R_1, |w| < R_2\}$ и $\{|z| > R_1 - 2\varepsilon, |w| > R_2 - 2\varepsilon\}$, то функции $f_k(z)$ и $g_k(z)$ являются аналитическими, соответственно, в областях $(|z| < R_1)$ и $(|z| > R_1 - 2\varepsilon)$, а при $|z| = R_1 - \varepsilon$ удовлетворяют условиям

$$\overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k(z')|} < \frac{1}{R_2}, \quad \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|g_k(z')|} < R_2 - 2\varepsilon. \quad (2)$$

Выполним в формуле (1) интегрирование по w :

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{|z|=R_1-\varepsilon} \int_{|w|=R_2-\varepsilon} f(z, w) g(z, w) dz dw = \\ &= \int_{|z|=R_1-\varepsilon} \int_{|w|=R_2-\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^{\infty} w^k f_k(z) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} w^{k-1} g_k(z) \right) dz dw = \\ &= \int_{|z|=R_1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) g_k(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|z|=R_1-\varepsilon} f_k(z) g_k(z) dz. \end{aligned}$$

Таким образом, линейный функционал в рассматриваемом пространстве может быть задан последовательностью функций $g_k(z)$, аналитических при $|z| > R_1 - 2\varepsilon$ и удовлетворяющих на некотором контуре, лежащем строго внутри $H_T = \{|z| < R_1\}$, условию

$$\overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|g_k(z')|} < R_T(z) - \varepsilon,$$

где $R_T(z) = R_2$. Очевидно, что рассмотрение бицилиндров, центр которых не лежит в начале координат, не вносит ничего нового по сравнению с рассмотренным случаем.

В случае полукруговой области справедлива следующая:

Теорема. Пусть G — линейный непрерывный функционал в пространстве A_T , где T — полная полукруговая область. Тогда существует такой контур C , лежащий строго внутри H_T , и такая последовательность функций $g_k(z)$, аналитических вне контура C и на самом контуре C , что для любой функции $f(z, w) \in A_T$

$$G(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C f_k(z) g_k(z) dz. \quad (3)$$

При этом линейный функционал в A_T определяется последовательностью $\{g_k(z)\}$ в том и только том случае, когда рассматриваемая последовательность представима в виде

$$g_k(z) = \sum_{i=1}^N g_{k,i}(z),$$

где N зависит от G и не зависит от k , а функции $g_{k,i}(z)$ удовлетворяют условиям: 1) при любом k функция $g_{k,i}(z)$ должна быть голоморфна вне некоторого контура C_i , лежащего внутри H_T , а также и на самом контуре; 2) при любом $z \in C_i$ должно выполняться условие

$$\overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|g_{k,i}(z')|} < R_T(z) - \varepsilon.$$

Представление единственно при дополнительном предположении $g_k(\infty) = 0$, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Возьмем последовательность конечных полукруговых областей $\{T_p\}$ таких, что $T_p \subset T_{p+1}$ при любом p и $T_p \rightarrow T$ при $p \rightarrow \infty$. Обозначим через \dot{T} границу области T . Обозначим также

$$\varepsilon_p = \inf_{(z, w) \in \dot{T}; (z', w') \in T_p} \sqrt{|z' - z|^2 + |w - w'|^2}$$

и потребуем, чтобы $\varepsilon_p > \varepsilon_{p+1} > 0$ при любом p . Очевидно, что такой выбор последовательности $\{T_p\}$ возможен для любой полукруговой области T . С помощью областей T_p введем в пространстве A_T счетную последовательность норм

$$\|f\|_p = \max_{(z, w) \in T_p} |f(z, w)|.$$

Топология, определяемая этим набором норм, очевидно, эквивалентна топологии пространства A_T , введенной ранее.

Пусть G — линейный непрерывный функционал в пространстве A_T . Как известно ⁽³⁾, функционал, непрерывный в счетно-нормированном пространстве, непрерывен по одной из норм этого пространства. Следовательно, функционал G будет непрерывен по некоторой норме $\|\cdot\|_q$. Возьмем в области T_q произвольный круг $\{|w| < R_T(z_0); z = z_0 \in H_{T_q}\}$ и покроем его бицилиндром

$$K(z_0) = \left\{ |z - z_0| < \frac{\varepsilon_q}{2\sqrt{2}}; |w| < R_{T_q}(z_0) + \frac{\varepsilon_q}{2\sqrt{2}} \right\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \inf_{(z, w) \in \dot{T}} \inf_{(z', w') \in K(z_0)} \sqrt{|z - z'|^2 + |w - w'|^2} \geq \\ & \geq \inf_{(z, w) \in \dot{T}} \inf_{(z_0, w'') \in T_q} \sqrt{|z - z_0|^2 + |w - w''|^2} - \\ & - \sup_{(z', w') \in K(z_0)} \inf_{|w''| < R_{T_q}(z_0)} \sqrt{|z' - z_0|^2 + |w' - w''|^2} \geq \varepsilon_q - 1/2\varepsilon_q = 1/2\varepsilon_q, \end{aligned}$$

т. е. при $z_0 \in H_{T_q}$ каждый бицилиндр $K(z_0)$ лежит строго внутри T . Совокупность всех бицилиндров $K(z)$, $z \in H_{T_q}$, покрывает не только область T_q , но и ее замыкание \bar{T}_q . Следовательно, можно выбрать конечное число N бицилиндров $K_i = K(z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ так, чтобы

$$\bar{T}_q \subset K = \bigcup K_i \subset T.$$

Поскольку функционал G непрерывен по норме $\|\cdot\|_q$, а $T_q \subset K$, то рассматриваемый функционал будет также непрерывен по топологии пространства A_K . Так как $K = \bigcup K_i$, то $A_K = \bigcap A_{K_i}$. Отсюда, в силу одного предложения В. П. Хавина ⁽⁴⁾, стр. 239), следует, что функционал G представим в виде

$$G = \sum_{i=1}^N G_i,$$

где каждый функционал G_i определен в пространстве A_{K_i} и непрерывен по топологии этого пространства. Из замечаний, сделанных в начале заметки, следует, что функционалу G_i соответствует такая последовательность

функций $\{g_{k,i}(z)\}_K$, аналитических в области $|z - z_i| > \frac{\varepsilon_q}{2\sqrt{2}} - 2\varepsilon > 0$,

то при $f(z, w) \in A_{K_i}$ и $C_i = |z - z_i| = \varepsilon_q/2\sqrt{2} - \varepsilon$

$$G_i(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\bar{C}_i} f_k(z) g_k(z) dz.$$

Так как расстояние между любыми граничными точками областей T и A_{K_i} больше $1/2 \varepsilon_q$, то $R_{K_i}(z) < R_T(z) - \varepsilon_q/2$ при любом $z \in H_{K_i}$. Отсюда и из (2) следует, что при $z \in C_i$ последовательность $g_{k,i}(z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{z' \rightarrow z} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|g_{k,i}(z')|} < R_T(z) - 1/2 \varepsilon_q.$$

Пусть теперь $f(z, w) \in A_T$. Тогда соответствующие функции $f_k(z)$ будут аналитическими в области H_T , содержащей все круги H_{K_i} . Возьмем внутри области H_T контур C такой, что любой круг $|z - z_i| < \varepsilon_q/2\sqrt{2}$ лежит строго внутри C . Тогда при любых k и i :

$$\int_{C_i} f_k(z) g_{k,i}(z) dz = \int_C f_k(z) g_{k,i}(z) dz,$$

и, следовательно,

$$G(f) = \sum_{i=1}^N G_i(f) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \int_{C_i} f_k(z) g_{k,i}(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C f_k(z) g_k(z) dz.$$

Необходимость доказана.

Достаточность почти очевидна. Действительно, если $f(z, w) \in A_T$ и функции $g_{k,i}(z)$ удовлетворяют условиям теоремы, то, как это следует из свойств функций, аналитических в полукруговой области, при любом $\eta > 0$, начиная с некоторого $k = k_0(\eta)$, будут иметь место неравенства

$$\sqrt[k]{|f_k(z)|} < \frac{1+\eta}{R_T(z)}; \quad \sqrt[k]{|g_{k,i}(z)|} < R_T(z) - \varepsilon + \eta \quad (z \in C_i).$$

Но тогда ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) g_{k,i}(z)$$

сходятся абсолютно и равномерно на соответствующих контурах C_i , и, следовательно, функционал, задаваемый формулой

$$G(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C f_k(z) g_k(z) dz = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \int_{C_i} f_k(z) g_{k,i}(z) dz,$$

определен на всех функциях $f(z, w) \in A_T$ и непрерывен.

Наконец, для доказательства единственности представления (3) достаточно рассмотреть $G(w^k f_k(z))$, воспользовавшись при этом единственностью соответствующего представления функционала в случае одного переменного.

В заключение заметим, что полученный результат без труда переносится на случай числа переменных, большего двух. При этом вместо полукруговых областей рассматриваются области, являющиеся областями равномерной

сходимости рядов вида $\sum_{k=0}^{\infty} w^k f_k(z_1, \dots, z_n)$.

Поступило
14 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Айзенберг, Б. С. Митягин, Сибирск. матем. журн., 1, № 2 (1960).
- ² Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 1948.
- ³ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции, в. 2, 1958. * В. П. Хавин, ДАН, 121, № 2 (1958).

ДИМИТЪР СКОРДЕВ

О НЕКОТОРЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 II 1961)

Пусть в локально выпуклом вещественном линейном пространстве X даны выпуклый конус K и непрерывный линейный функционал $f_0(x)$, для которых выполнены перечисленные ниже четыре условия.

Условие I. Каждый элемент пространства X представим в виде разности двух элементов конуса K .

Условие II. $f_0(x) > 0$ при $x \in K$, $x \neq 0$.

Обозначим через S множество тех $x \in K$, для которых $f_0(x) = 1$.

Условие III. Множество S бикомпактно.

Введем в X упорядочение при помощи соглашения: $x \geq y$, если $x - y \in K$. Определим некоторое множество R_c операторов следующим образом: $a \in R_c$, если $a(x)$ — линейный оператор в пространстве X , который определен для каждого $x \in X$, непрерывен, если рассматривать его только при $x \in K$, и при подходящем значении числа α удовлетворяет неравенствам $\alpha x \geq a(x) \geq -\alpha x$ для каждого $x \in K$. Легко проверить, что R_c является кольцом. В R_c установим упорядочение: если $a \in R_c$ и $b \in R_c$, то $a \geq b$ будет означать, что $a(x) \geq b(x)$ для каждого $x \in K$. Вектор x назовем *к в а з и н е р а з л о ж и м ы м*, если $x \in K$, $x \neq 0$ и для каждого $a \in R_c$ вектор $a(x)$ коллинеарен с вектором x . Нетрудно убедиться, что каждый неразложимый вектор является квазинеразложимым (вектор x называем неразложимым, если $x \in K$, $x \neq 0$ и из $x \geq y \geq 0$ следует, что y коллинеарно с x).

Условие IV. Если три квазинеразложимых вектора попарно неколлинеарны, то они линейно независимы.

В качестве примера рассмотрим пространство X всех функций $x(t)$ с ограниченным изменением на сегменте $[\lambda, \mu]$, для которых $x(\lambda) = 0$ и $x(t) = \frac{1}{2} [x(t-0) + x(t+0)]$ при $\lambda < t < \mu$. Топология в X опре-

деляется при помощи системы полунорм $p_n(x) = \int_{\lambda}^{\mu} t^n dx(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В качестве K выберем множество неубывающих функций из X и положим

$f_0(x) = x(\mu)$. В этом случае операторы $y = a(x)$, где $y(t) = \int_{\lambda}^t u(s) dx(s)$

и $u(s)$ непрерывна на $[\lambda, \mu]$, принадлежат R_c . Пользуясь этим, можно установить (см. (7)), что в данном случае функция из K является квазинеразложимым вектором тогда и только тогда, когда она имеет только одну точку роста. Относительно других примеров, где систематически используются операторы из R_c , см. (4-6).

Возвращаясь к общему случаю, обозначим через M (очевидно, непустое и бикомпактное) множество тех квазинеразложимых векторов x , для которых $f_0(x) = 1$. Далее обозначим через C полуупорядоченное кольцо всех вещественных непрерывных функций, определенных на M , а через C^* — полуупорядоченное линейное пространство всех линейных функцио-

налов в C , которые ограничены относительно равномерной нормы в C (упорядочение в C и в C^* вводится обычным образом).

Теорема 1. Для каждой $\varphi \in C$ существует оператор $a_\varphi \in R_c$, однозначно определенный требованием, чтобы равенство $a_\varphi(x) = \varphi(x)x$ выполнялось для каждого $x \in M$. Соответствие $\varphi \rightarrow a_\varphi$ является изоморфизмом полуупорядоченного кольца C на полуупорядоченное кольцо R_c .

Теорема 2. Для каждого $\Phi \in C^*$ существует элемент $x_\Phi \in X$, однозначно определенный требованием, чтобы равенство $\Phi(\varphi) = f_0(a_\varphi(x_\Phi))$ выполнялось для любой $\varphi \in C$. Соответствие $\Phi \rightarrow x_\Phi$ является изоморфизмом полуупорядоченного линейного пространства C^* на полуупорядоченное линейное пространство X .

Наметим доказательство теоремы 1. Из определения множества M видно, что для каждого $a \in R_c$ существует функция $\varphi(x)$, определенная однозначно для любого $x \in M$ равенством $a(x) = \varphi(x)x$. Нетрудно увидеть, что эта функция непрерывна. Соответствие $a \rightarrow \varphi$ является монотонным гомоморфизмом полуупорядоченного кольца R_c в полуупорядоченное кольцо C . Это соответствие взаимно-однозначно. В самом деле, если некоторому $a \in R_c$ соответствует постоянная 0, то $a(x) = 0$ для каждой крайней точки x множества S (все крайние точки S принадлежат M). На основании теоремы Крейна — Мильмана ⁽¹⁾ заключаем, что $a(x) = 0$ для любого $x \in S$, откуда следует, что $a(x)$ тождественно равно 0. Рассуждая аналогичным образом, убеждаемся, что если некоторому $a \in R_c$ соответствует неотрицательная функция φ , то для любого $x \in S$ имеем $a(x) \in K$, откуда следует, что $a \geq 0$. Другими словами, рассматриваемое соответствие является изоморфизмом полуупорядоченного кольца R_c на некоторое подкольцо C_0 полуупорядоченного кольца C . Используя условие III, доказываем, что R_c полно относительно нормы $\|a\|$, определяемой как наименьшее из чисел α , для которых $\alpha x \geq a(x) \geq -\alpha x$ при любом $x \in K$. Отсюда следует, что C_0 полно относительно равномерной нормы. Пусть x_1 и x_2 — две различные точки M . В силу условия IV вектор $x_1 + x_2$ не является квазинеразложимым. Если выберем $a \in R_c$ таким образом, чтобы вектор $a(x_1 + x_2)$ не был коллинеарным с $x_1 + x_2$, то для функции φ , соответствующей оператору a , будем иметь $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, т. е. кольцо C_0 разделяет точки M . Применяя одну теорему Стона ⁽²⁾, получаем, что $C_0 = C$, чем теорема 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. Пусть x — данный элемент пространства X . Рассмотрим линейный функционал Φ в C , определенный равенством $\Phi(\varphi) = f_0(a_\varphi(x))$. Если $x \in K$, то $\Phi(\varphi) \geq 0$ для каждой неотрицательной $\varphi \in C$. Из этого следует, что соответствие $x \rightarrow \Phi$ является монотонным линейным отображением полуупорядоченного линейного пространства X в полуупорядоченное линейное пространство C^* . Обозначим это отображение через τ . Пусть для некоторого $x_0 \in X$ соответствующий функционал $\Phi_0(\varphi)$ тождественно равен 0. Допустим, что $x_0 \neq 0$. Выберем непрерывный линейный функционал $f(x)$ в X , для которого $f(x_0) \neq 0$. Обозначим через φ элемент C , получающийся, если рассматривать $f(x)$ только при $x \in M$. При помощи теоремы Крейна — Мильмана легко доказать, что для каждого $x \in S$ и, следовательно, для каждого $x \in X$ выполняется равенство $f_0(a_\varphi(x)) = f(x)$. Для $x = x_0$ получаем $\Phi_0(\varphi) = f(x_0) \neq 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $x_0 = 0$. Таким образом доказано, что τ является взаимно-однозначным соответствием. Обозначим через Σ множество всех положительных линейных функционалов в C , значение которых для постоянной 1 равняется 1. Известно, что Σ является наименьшим слабо замкнутым выпуклым множеством в C^* , которое содержит все функционалы вида $\Phi(\varphi) = \varphi(x_0)$, где $x_0 \in M$. Пусть Σ_1 — отображение S при соответствии τ . Множество Σ_1 слабо замкнуто и выпукло, так как τ слабо непрерывно и линейно. Для каждого $x_0 \in M$ функционал $\Phi(\varphi) = \varphi(x_0)$ есть образ x_0 при соответствии τ и, следовательно, принадлежит Σ_1 . Это дает, что $\Sigma_1 \supset \Sigma$, откуда следует, что образ K при соответствии τ совпадает с множеством всех положительных линейных функцио-

алов в S . Так как, на основании одной теоремы Рисса (²), каждый элемент S^* представим в виде разности двух положительных линейных функционалов в S , из этого сразу следует, что τ есть изоморфизм полуупорядоченного линейного пространства X на полуупорядоченное линейное пространство S^* . Рассматривая обратное соответствие, убеждаемся в верности теоремы 2.

Используя результаты Рисса (²), из теоремы 2 получаем.

С л е д с т в и е. Каждое ограниченное сверху непустое подмножество полуупорядоченного пространства X имеет точную верхнюю границу.

В заключение заметим следующее: при наших предположениях все вазинеразложимые векторы неразложимы (что можно усмотреть, пользуясь теоремой 2), но этого нельзя утверждать, если опустить условие IV.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
10 IX 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. Krein, D. Milman, *Studia Math.*, **9**, 133 (1940). ² F. Riesz, *Atti Congresso Bologna*, **3**, 143 (1928). ³ M. Stone, *Trans. Am. Math. Soc.*, **41**, 375 (1937). Я. Тагамлици, *Годишник на Соф. унив., физ.-матем. фак.*, **46**, кн. 1, 385 (1949—1950). ⁴ Я. Тагамлици, *Годишник на Соф. унив., физ.-матем. фак.*, **47**, кн. 1, 2, 85 (1950—1951, 1951—1952). ⁵ Я. Тагамлици, *Годишник на Соф. унив., физ.-матем. фак.*, **50**, кн. 1, ч. 1, 135 (1955—1956). ⁶ Я. Тагамлици, *Дифференциально и интегрално смятане*, София, 1957, стр. 661.

П. Л. УЛЬЯНОВ

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ ХААРА И ПО БАЗИСАМ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 21 I 1961)

§ 1. Данная заметка является непосредственным продолжением исследований, которые были опубликованы нами в статье ⁽¹²⁾.

В работе А. Н. Колмогорова и Д. Е. Меньшова ⁽³⁾ было сформулировано утверждение (принадлежащее А. Н. Колмогорову), которое гласит:

Существует функция $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ такая, что члены ее тригонометрического ряда Фурье можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Исходя из этого результата, в работе ⁽¹⁰⁾ нами было установлено, что справедлива

Теорема I. *Существует функция $F(x) \in L^p(0, 2\pi)$ при всех $p > 0$ и такая, что для любого метода суммирования T^* члены тригонометрического ряда Фурье функции $F(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд не был суммируем методом T^* почти всюду на $[0, 2\pi]$.*

В связи с теоремой I полезно заметить, что в ней можно утверждать не только несуммируемость методом T^* , а даже неограниченность T^* -средних некоторых переставленных тригонометрических рядов Фурье функции $F(x)$. Кроме того, теорема I верна и для методов суммирования, которые применяются непосредственно к рядам (а не к последовательностям). Такие методы мы будем обозначать через $\gamma^* = \|b_{n,m}\|$ и будем при этом лишь предполагать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,m} = 1$ ($m = 1, 2, \dots$).

В работе Загорского ⁽⁹⁾, хотя и без подробного доказательства, приводится схема построения почти всюду расходящегося переставленного тригонометрического ряда класса L^2 . Видоизменяя конструкцию Загорского ⁽⁹⁾ и используя одно наше утверждение (см. ⁽¹⁰⁾, стр. 816), мы анонсировали в работе ⁽¹²⁾ результат, который гласит, что теорема I остается в силе и для системы Уолша. Кроме того, в той же работе ⁽¹²⁾ была сформулирована:

Теорема II. *Существует функция $F(x) \in L^2(0, 1)$ такая, что для всякого метода суммирования T^* некоторый переставленный ряд Фурье функции $F(x)$ по системе Хаара $\{\chi_n^{(k)}\}$ не суммируем методом T^* почти всюду на $[0, 1]$.*

§ 2. В данном параграфе мы приведем новые результаты, относящиеся к рядам по системе Хаара. Предварительно введем.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) — почти всюду конечные измеримые функции на $[0, 1]$. Тогда мы говорим, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(x) \quad (c_i — \text{некоторые постоянные}) \quad (1)$$

обладает свойством D , если для всякого метода суммирования $\gamma^* = \|b_{n,m}\|$ (метода T^*) члены ряда (1) можно так переставить, чтобы вновь

полученный ряд был не суммируем методом γ^* (методом T^*) в почти каждой точке $x \in [0, 1]$. Более того, если метод γ^* удовлетворяет условию $\lim_{m \rightarrow \infty} b_{n,m} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то члены ряда (1) можно так переставить, чтобы γ^* -средние (T^* -средние) были неограничены в почти каждой точке $x \in [0, 1]$.

Теорема 1. *Какова бы ни была возрастающая последовательность целых чисел n_m , существует ряд $\sum_{m=1}^{\infty} A_m(x)$ с $A_m(x) = \sum_{s=1}^{2^{n_m}} a_{n_m}^{(s)} \chi_{n_m}^{(s)}(x)$ и*

$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2^{n_m}} (a_{n_m}^{(s)})^2 < \infty$ такой, что после некоторой перестановки функций $A_m(x)$ ряд $\sum_{v=1}^{\infty} A_{m_v}(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ неограниченно расходится.

Из теоремы 1 мы видим, что для того чтобы строить расходящиеся ряды Фурье класса L^2 по переставленной системе Хаара, нет необходимости брать все функции Хаара. Именно, достаточно взять лишь функции Хаара, у которых нижний индекс пробегает бесконечно много значений n_i , а верхний индекс пробегает при этом $1 \leq s \leq n_i$.

Теорема 2. *Существует функция $F(x) \in L^p(0, 1)$ для всех $p > 0$ такая, что если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2^n} a_n^{(s)} \chi_n^{(s)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \chi_m(x) \quad (2)$$

является рядом Фурье функции $F(x)$, то ряд (2) обладает свойством D.

Теорема 3. *Пусть $\omega(n) \uparrow \infty$ и $\omega(n) = o(\log n)$. Тогда существует функция $f(x) \in L^2(0, 1)$, ряд Фурье которой $\sum a_m \chi_m(x)$ после некоторой перестановки членов $\sum a_{p_v} \chi_{p_v}(x)$ расходится почти всюду на $[0, 1]$ и, тем не менее, $\sum a_m^2 \omega(m) < \infty$, $\sum a_{p_v}^2 \omega(v) < \infty$. Здесь $\chi_m(x) = \chi_n^{(k)}(x)$, если $m = 2^n + k$ с $1 \leq k \leq 2^n$.*

Теорема 4. *Для всякого $\varepsilon > 0$ последовательность $(\log n)^{1+\varepsilon}$ является как множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду рядов по системе Хаара $\{\chi_m(x)\}$, так и множителем сходимости Вейля для рядов по любой переставленной системе Хаара.*

Особый интерес теорем 3 и 4 обуславливается (по нашему мнению) тем, что они дают, в частности, примерный порядок множителя Вейля для безусловной сходимости почти всюду рядов по системе Хаара. Это первый результат, относящийся к классическим ортонормированным системам, в котором речь идет об окончательности множителя Вейля для безусловной сходимости. Что касается тригонометрических рядов (а также рядов по системе Уолша), то в указанном направлении не имеется сколько-нибудь окончательных результатов.

§ 3. В этом параграфе мы изложим результаты, относящиеся к рядам по базисам. Предварительно напомним:

Определение 2. Пусть E — пространство типа B (Банаха). Тогда систему $f_i \in E$ ($i = 1, 2, \dots$) называют базисом в E , если для всякого $f \in E$ существует и притом единственная числовая последовательность $\{c_i\}$ такая, что $f = \sum c_i f_i$.

Определение 3. Пусть $E = L^2 = L^2(0, 1)$ и $f_i = f_i(x)$ — базис в пространстве $L^2(0, 1)$. Тогда систему $\{f_i(x)\}$ называют базисом Рисса, если для любого $f \in L^2$ с $f = \sum c_i f_i$ справедливо неравенство

$\sum c_i^2 < \infty$ и, кроме того, если для всякой последовательности $\{d_i\}$ с $\sum d_i^2 < \infty$ ряд $\sum d_i f_i$ является разложением некоторого $F \in L^2$.

Последнее определение было введено Н. К. Бари ⁽²⁾.

В указанных определениях справедливы:

Теорема 5. Пусть $\{f_k(x)\}$ — базис в $L^2(0, 1)$. Тогда существует функция $F(x) \in L^2(0, 1)$ такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x)$, являющийся разложением (в норме L^2) функции $F(x)$ по базису $\{f_k(x)\}$, обладает свойством D.

При доказательстве теоремы 5 нами использованы следующие соображения: а) теорема 1 из § 1; б) теорема Банаха ⁽¹⁾, стр. 95—96) о том, что если $\{f_i\}$ — базис в пространстве E типа B , то найдется последовательность линейных непрерывных функционалов $\{U_j(x)\}$, определенных на E , такая, что $\{U_j, x_i\}$ — биортогональная система; в) метод доказательства Марцинкевичем ⁽⁶⁾ (см. также ⁽⁴⁾, стр. 352—357) теоремы о том, что всякая ортонормированная система имеет подпоследовательность сходимости (это утверждение было доказано Марцинкевичем ⁽⁶⁾ и Меньшовым ⁽⁷⁾); г) одно наше утверждение, относящееся к суммированию расходящихся рядов ⁽¹¹⁾. следствие 3, стр. 792).

Теорема 6. Пусть $\{f_i(x)\}$ — базис Рисса в пространстве $L^2(0, 1)$ такой, что он ограничен в совокупности. Тогда найдется функция

$F(x) \in L^p(0, 1)$ для всех $p > 0$ такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x) = F(x)$ почти всюду сходится на $[0, 1]$ и обладает свойством D.

§ 4. В обзорной статье к книге Кука мною сформулирована проблема (см. ⁽⁵⁾, стр. 452, проблема 3) **:

Существует ли ортонормированная полная система $\{\varphi_n(x)\}$, являющаяся системой безусловной сходимости (т. е. всякий ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ ($x \in [0, 1]$) при любом порядке членов сходится почти всюду на $[0, 1]$, как только $\sum a_n^2 < \infty$).

Мы дадим ответ *** на этот вопрос, а также докажем и несколько других теорем, относящихся к ортонормированным полным системам.

Теорема 7. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная полная система на отрезке $[0, 1]$. Тогда существует ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ с $\sum a_n^2 < \infty$, который почти всюду сходится на $[0, 1]$ и обладает свойством D.

З а м е ч а н и е. Хотя теорема 7 фактически вытекает из теоремы 5, тем не менее мы ее сформулировали особо, так как нам представляется, что она имеет принципиальное значение. Вообще, быть может, полезно отметить, что теорема 7 вытекает (в своей основе) из теоремы 1, если учесть идею рассуждений Марцинкевича. Что касается теоремы 5, то она также вытекает (по существу) из теоремы 1, если, кроме рассуждений Марцинкевича, привлечь еще теорему Банаха.

Из теоремы 7 непосредственно вытекает, что справедлива:

Теорема 8. Не существует ортонормированной полной системы $\{\varphi_n(x)\}$, которая бы являлась системой безусловной сходимости почти всюду.

Это утверждение дает отрицательный ответ на указанную выше проблему.

Из теоремы 7, с учетом теоремы Качмажа ⁽⁴⁾, стр. 205—207), еще вытекает:

* Здесь равенство понимается в смысле сходимости (по норме в L^2) стоящего слева ряда к $F(x)$.

** Нам неизвестно, была ли где-нибудь ранее опубликована постановка такой проблемы.

*** В этом же направлении получены результаты А. М. Олевским ⁽⁸⁾, работа которого публикуется в настоящем номере.

Следствие. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная полная система на $[0, 1]$, то ее можно переставить так, чтобы функции Лебега переставленной системы $\{\varphi_{m_i}(x)\}$ были неограничены в почти каждой точке $x \in [0, 1]$.

Приведем еще один результат, относящийся к этому же кругу вопросов:

Теорема 9. Пусть ортонормированная полная система $\{\varphi_n(x)\}$ ограничена в совокупности на $[0, 1]$. Тогда существует функция

$F(x) \in L^p(0, 1)$ для всех $p > 0$ и такая, что ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ с $a_n = \int_0^1 F(t) \varphi_n(t) dt$

почти всюду сходится на $[0, 1]$ и обладает свойством D.

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 6.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносов

Поступило
18 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. ² Н. К. Барн, Уч. зап. МГУ, в. 148, 4, 69 (1951). ³ А. Колмогоров, D. Menschof, Math. Zs., 26, 432 (1927). ⁴ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958. ⁵ Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., 1960. ⁶ J. Marcinkiewicz, Studia Math, 6, 39 (1936). ⁷ Д. Е. Меньшов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 2, 203 (1937). ⁸ А. М. Олевский, ДАН, 138, № 3 (1961). ⁹ Z. Zahorski, C. R., 251, 501 (1960). ¹⁰ П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 6, 811 (1958). ¹¹ П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 781 (1959). ¹² П. Л. Ульянов, ДАН, 137, № 4 (1961).

ЧЭНЬ СЕ-ЧАН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{z^{\tau_n} \log^j z\}$ НА КРИВЫХ И В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 I 1961)

Имеются многочисленные работы, посвященные изучению вопроса о полноте системы полиномов, а также системы $\{z^{\tau_n}\}$, где $\{\tau_n\}$ — последовательность чисел на бесконечных кривых с весом, в бесконечных областях и в конечных областях с несвязным дополнением. В настоящей работе рассматривается вопрос о полноте системы $\{z^{\tau_n} \log^j z\}$ на бесконечных кривых с весом и в областях комплексной плоскости. По постановке задач, методам исследования и результатам работа наиболее тесно примыкает к работам (1-7).

В отличие от этих работ, мы не требуем, чтобы последовательность $\{\tau_n\}$ удовлетворяла условию $\tau_{n+1} - \tau_n \geq q > 0$. Кроме того, наши результаты установлены при менее жестких ограничениях на вес и рассматриваемые кривые и области.

Пусть последовательность $\{v_n\}$ комплексных чисел удовлетворяет следующим условиям:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|v_n|} = D_v$,
2. $\operatorname{Re} v_n > 0$, $|\operatorname{Im} v_n| < C$; C — константа.

Обозначим через $\{\tau_n\}$ последовательность всех различных чисел из $\{v_n\}$, через m_n ($n = 1, 2, \dots$) — число, показывающее, сколько раз τ_n встречается в $\{v_n\}$.

Пусть \mathcal{L} — неограниченная кривая, состоящая из конечного числа ветвей, удаляющихся в бесконечность, обладающая следующими свойствами:

1. Она не содержит петель и спрямляема в любой конечной части плоскости.

2. Она разбивает плоскость z на конечное число бесконечных областей G_i ($i = 1, 2, \dots, m$), каждая из которых содержит некоторый угол Δ_i с раствором π/α_i , $1/2 \leq \alpha_i < \infty$.

3. Область G_1 содержит некоторый криволинейный угол P с вершиной в начале. Вдали от начала угол P совпадает с углом Δ_1 . Каждая из сторон l_1 и l_2 угла P пересекается с $|z| = r$, $0 < r < +\infty$, только в одной точке. К сторонам l_1 , l_2 угла можно провести в начале касательные. Угол P имеет раствор $\geq \pi/\alpha_1$, причем

$$\frac{1}{\alpha_1} > 2(1 - D_v). \quad (1)$$

Здесь кривая \mathcal{L} может состоять из конечного числа связных кривых.

Положим, что на \mathcal{L} задана вещественная непрерывная функция $p(z)$ такая, что при больших $|z|$

$$p(z) \geq p_0(|z|) = p_0(a) + \int_a^{|z|} \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad (2)$$

где a — константа, $\omega(t) \geq 0$, $\omega(t) \uparrow +\infty$.

Теорема 1. При указанных условиях, если при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\omega}} dr = +\infty, \quad \omega = \max \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} - 2(1-D_v)} + \varepsilon_0 \right), \quad (3)$$

система $\{z^{\tau_n} \log^j z\}$ ($n = 0, 1, \dots; \tau_0 = 0; j = 0, 1, \dots, m_n - 1$) полна на \mathcal{L} в классе $C[p(z)]$ функций $f(z)$, непрерывных на \mathcal{L} и таких, что $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{L}}} e^{-p(z)} f(z) = 0$,

и полна в смысле

$$\inf_{\{Q\}} \sup_{z \in \mathcal{L}} e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)| = 0, \quad (4)$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным линейным комбинациям функций $z^{\tau_n} \log^j z$.

Если для последовательности $\{v_n\}$ предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|v_n|}$ не существует, то предполагаем выполнение следующих условий:

1. $D_{*v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|v_n|} > 0$,
2. $\operatorname{Re} v_n > 0, |\operatorname{Im} v_n| < C$.
3. $\sup_{0 < \xi < 1} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_v(r) - N_v(r\xi)}{r - r\xi} < +\infty$,

где $N_v(r)$ — число точек из $\{v_n\}$, попавших в круг $|z| < r$.

Кроме того, в третьем условии теоремы 1 относительно кривой \mathcal{L} угол P будем считать прямолинейным с вершиной в начале, имеющим раствор π/α_1 , $1/\alpha_1 > 2(1 - D_{*v})$. Остальные условия теоремы 1 сохраним.

Теорема 2. При указанных условиях, если выполнено условие (3) с заменой D_v на D_{*v} , система $\{z^{\tau_n} \log^j z\}$ полна в смысле (4) в классе $C[p(z)]$.

В дальнейшем для простоты мы будем формулировать результаты только для случая, когда для $\{v_n\}$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|v_n|}$ существует.

При дополнительном предположении, что при некотором $\varepsilon^* > 0$

$$\int_{\mathcal{L}} e^{-p(z)} \frac{1}{1+\varepsilon^*} d\sigma < +\infty,$$

имеет место:

Теорема 3. В условиях теоремы 1 система $\{z^{\tau_n} \log^j z\}$ полна на \mathcal{L} в классе $L_p[p(z)]$ ($p > 0$) функций $f(z)$, определенных на \mathcal{L} и таких, что

$$\int_{\mathcal{L}} e^{-p(z)} |f(z)|^p d\sigma < +\infty, \text{ и полна в смысле}$$

$$\inf_{\{Q\}} \int_{\mathcal{L}} e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)|^p d\sigma = 0,$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным линейным комбинациям функций $z^{\tau_n} \log^j z$ ($n = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, m_n - 1$).

Теперь обозначим через $\Delta(\alpha)$ область, заключенную между двумя пересекающимися в начале под углом π/α окружностями.

Пусть множество B^* состоит из конечного числа областей B_i^* ($i = 1, 2, \dots, p$) типа луночки (т. е. B_i^* топологически эквивалентна области, ограниченной двумя окружностями, имеющими внутреннее соприкосновение), причем положим, что области B_i^* имеют только одну общую кратную граничную точку

в начале. Одна из дополнительных к \bar{B}^* областей, пусть G_1^* , содержит бесконечно удаленную точку. Допустим, что G_1^* содержит некоторый криволинейный угол P с вершиной в начале, который обладает свойством 3 теоремы 1, причем раствор угла P больше или равен π/α_1 , $1/\alpha_1 > 2(1 - D_1)$. Здесь D_1 — плотность последовательности $\{v_n\}$, удовлетворяющей условию 1. Остальные дополнительные к \bar{B}^* области G_i^* ($i = 2, 3, \dots, p+1$) пусть содержат соответственно углы типа $\Delta(\alpha_i)$ ($i = 2, 3, \dots, p+1$).

Пусть $\sigma^*(r)$ — сумма длин дуг, отсекаемых множеством B^* на $|z| = r$ и $\sigma^*(r) \leq e^{-p_0^*(r)}$, где

$$p_0^*(r) = p_0^*(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{\omega^*(t)}{t} dt,$$

r_0 — константа, и $\omega^*(t) \uparrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема 4. При указанных условиях, если

$$\int_0^\infty \frac{p_0^*(r)}{r^{1-\omega}} dr = +\infty, \quad \omega = \max(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p+1}),$$

система $\{z^{-n} \log^j z\}$ полна на B^* в классе $L_2[B^*]$ функций $f(z)$, аналитических в B^* и таких, что $\int_{B^*} |f(z)|^2 dx dy < +\infty$, и полна в смысле

$$\inf_{\{Q\}} \int_{B^*} |f(z) - Q(z)|^2 dx dy = 0. \quad (5)$$

Пусть множество B , состоящее из конечного числа односвязных бесконечных областей B_i ($i = 1, 2, \dots, p$), разбивает плоскость на конечное число односвязных областей G_i ($i = 1, 2, \dots, m$), каждая из которых содержит угол Δ_i с раствором π/α_i , причем область G_1 обладает свойством 3 теоремы 1 относительно кривой \mathcal{L} .

Допустим, что полуось $[0, +\infty]$ можно разделить на два множества E_1 и E так, чтобы:

$$1) \text{ при } r \in E_1 \quad \sigma(r) \leq e^{-p_0(r)};$$

$$2) \text{ при } r \geq r_0 \quad E(r) \leq e^{-p_0(r)},$$

где $\sigma(r)$ — сумма длин дуг, отсекаемых множеством B на $|z| = r$, $E(r)$ — линейная мера пересечения E с лучом $[r, +\infty)$, $p_0(r)$ удовлетворяет условию (2).

Теорема 5. При указанных условиях и условии (3) система $\{z^{-n} \log^j z\}$ полна в смысле (5) на B в классе $L_2[B]$.

Пусть B — односвязная область, полученная из всей плоскости удалением конечного числа непересекающихся прямолинейных углов Δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) с раствором π/α_i , причем угол имеет вершину в начале и $1/\alpha_1 > 2(1 - D_1)$.

Теорема 6. При указанных условиях, если имеет место (3), система $\{z^{-n} \log^j z\}$ полна на B в классе $L_2[p(z)]$ функций, аналитических в B и таких, что $\int_B e^{-p(z)} |f(z)|^2 dx dy < +\infty$, и полна в смысле

$$\inf_{\{Q\}} \int_B e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)|^2 dx dy = 0.$$

Отметим, что все условия, фигурирующие в предыдущих теоремах, вообще говоря, являются и необходимыми.

Доказательство этих теорем основано на одновременном применении теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка, использованной уже А. Ф. Леонтьевым ⁽⁷⁾ для установления полноты системы $\{z^{\tau_n}\}$, где τ_n — целые числа, и некоторого ядра, которое в частном случае представляется рядом Дирихле и в этом случае было использовано в вопросах полноты С. Мандельбройтом ⁽⁵⁾.

Перечисленные теоремы представляют собой обобщение в том или ином смысле ряда теорем упомянутых в начале авторов.

В заключение приношу сердечную благодарность проф. А. Ф. Леонтьеву за постановку вопросов и руководство этой работой.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Шагинян, Сообщ. Инст. матем. и мех. АрмССР, в. 1, 1 (1947).
² W. H. Fuchs, Proc. Cambridge Phil. Soc., 42, 91 (1946). ³ М. М. Джрбашян, Докторская диссертация, МГУ, 1948. ⁴ М. М. Джрбашян, Матем. сборн., 36 (78), № 3, 354 (1955). ⁵ М. Мандельбройт, Примающиеся ряды, регуляризация последовательностей, применения, ИЛ, 1955. ⁶ М. М. Джрбашян, И. О. Хачатрян, ДАН, 110, № 6, 914 (1956). ⁷ А. Ф. Леонтьев, ДАН, 121, № 5, 797 (1958).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

СТРОЕНИЕ РЕЗОЛВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ
ТРЕХ ЧАСТИЦ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 I 1961)

Оператор энергии системы N попарно взаимодействующих частиц с массами m_1, \dots, m_N имеет вид

$$H_N = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i < j}^N v_{ij}(r_i - r_j). \quad (1)$$

Здесь r_i — радиус-вектор i -й частицы и ∇_i^2 — трехмерный оператор Лапласа по переменной r_i . В теории рассеяния все потенциалы $v_{ij}(r)$ убывают, когда $|r| \rightarrow \infty$.

В настоящее время подробно изучен только оператор H_2 . Именно, А. Я. Повзнер ^(1,2) изучил спектр этого оператора при определенных условиях на $v_{12}(r)$ и доказал теорему разложения по его собственным функциям. Эти результаты были уточнены Като ⁽³⁾ и Икебе ⁽⁴⁾. Основу подхода А. Я. Повзнера составляет изучение резольвенты оператора H_2 на комплексной плоскости и особенно в окрестности вещественной оси. Используемый им метод не переносится непосредственно на случай $N > 2$.

Недавно автор предложил в физической статье ⁽⁵⁾ новые интегральные уравнения для исследования системы с тремя частицами. В настоящей работе приводятся некоторые результаты, полученные с помощью этих уравнений, относительно поведения резольвенты оператора H_3 на комплексной плоскости. Основной результат сформулирован в теореме.

1. Вместо оператора H_3 нам удобнее изучать оператор H , полученный из H_3 после перехода в импульсное представление (т. е. после преобразования Фурье) и отделения оператора энергии движения центра инерции. За недостатком места мы не описываем соответствующий переход. Для упрощения формул считаем, что $m_1 = m_2 = m_3$. Ниже описывается оператор H .

Рассмотрим три вектора p_1, p_2 и p_3 , связанных между собой соотношением

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0, \quad (2)$$

так что каждая пара p_1, p_2 ; p_2, p_3 и p_3, p_1 независимым образом пробегает все шестимерное пространство E_6 . Оператор H задается в $\mathcal{L}_2(E_6)$ и имеет вид

$$H = H_0 + V = H_0 + V_{23} + V_{31} + V_{12}, \quad (3)$$

где H_0 является оператором умножения на функцию

$$p_1^2 + (p_1 p_2) + p_2^2 = p_2^2 + (p_2 p_3) + p_3^2 = p_3^2 + (p_3 p_1) + p_1^2 \quad (4)$$

с естественной областью определения; оператор V_{23} имеет ядро

$$V_{23}(p, p') = v_{23}(p_2 - p'_2) \delta(p_1 - p'_1), \quad (5)$$

и операторы V_{31} и V_{12} определяются аналогичным образом в координатах p_3 , p_2 и p_1 , p_3 соответственно.

Относительно функций $v_{ij}(q) = \overline{v_{ij}(-q)}$ мы требуем оценку

$$|v_{ij}(q)| \leq C(1 + |q|)^{-1-\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 > 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

При этом условии операторы $(H_0 + 1)^{-\alpha} V_{ij} (H_0 + 1)^{-\alpha}$ при $\alpha > 1/2 - \epsilon_0/4$ ограничены в $\mathcal{L}_2(E_6)$, что позволяет однозначно определить при помощи квадратичной формы самосопряженный оператор H .

2. Пусть $R(z) = (H - zI)^{-1}$ и $R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$ — резольвенты операторов H и H_0 соответственно. Справедливо соотношение

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)VR(z), \quad (7)$$

причем, если искать $R(z)$ в виде

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z), \quad (8)$$

то для $T(z)$ эквивалентное соотношение имеет вид

$$T(z) = V - VR_0(z)T(z). \quad (9)$$

Уравнения типа (7) или (9) оказались полезными при изучении оператора H_2 , причем в импульсном представлении удобнее уравнение типа (9). Для применения к нашей задаче уравнение (9) следует «частично решить». Это частичное решение осуществляется с помощью следующего приема, который кажется несколько искусственным, но на самом деле имеет вполне естественное основание, которое мы не можем привести за недостатком места.

Рассмотрим матричное уравнение (здесь и ниже готическими буквами обозначаются матрицы 3×3 , составленные из операторов)

$$\mathfrak{X}(z) = \begin{pmatrix} V_{23} & 0 & 0 \\ 0 & V_{31} & 0 \\ 0 & 0 & V_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_{23} & V_{23} & V_{23} \\ V_{31} & V_{31} & V_{31} \\ V_{12} & V_{12} & V_{12} \end{pmatrix} R_0(z) \mathfrak{X}(z). \quad (10)$$

Это уравнение связано с уравнением (9) в том смысле, что сумма всех матричных элементов матрицы $\mathfrak{X}(z)$ удовлетворяет уравнению (9). Пусть $T_{23}(z)$ — решение уравнения

$$T_{23}(z) = V_{23} - V_{23}R_0(z)T_{23}(z), \quad (11)$$

и аналогичным образом определены $T_{31}(z)$ и $T_{12}(z)$. Обращая в уравнении (10) диагональную часть, мы приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(z) \begin{pmatrix} T_{23}(z) & 0 & 0 \\ 0 & T_{31}(z) & 0 \\ 0 & 0 & T_{12}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} R_0(z) \mathfrak{X}(z) = \\ = \mathfrak{X}_0(z) - \mathfrak{U}(z) \mathfrak{X}(z). \end{aligned} \quad (12)$$

С помощью уравнения (11) можно убедиться, что оператор $T_{23}(z)$ имеет ядро

$$T_{23}(p, p') = t_{23}(-p_2 - 1/2 p_1, -p'_2 - 1/2 p_1, z - 3/4 p_1^2) \delta(p_1 - p'_1), \quad (13)$$

где $t_{23}(k, k', z)$ — решение интегрального уравнения типа

$$t(k, k', z) = v(k - k') - \int v(k - k'') (k''^2 - z)^{-1} t(k'', k', z) dk''. \quad (14)$$

Чтобы не иметь δ -образных особенностей в свободном члене, удобнее изучать матрицу $\mathfrak{W}(z) = \mathfrak{X}(z) - \mathfrak{X}_0(z)$, уравнение для которой имеет вид

$$\mathfrak{W}(z) = \mathfrak{W}_0(z) - \mathfrak{U}(z) \mathfrak{W}(z), \quad (15)$$

где

$$\mathfrak{W}_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z)R_0(z)T_{31}(z) & T_{23}(z)R_0(z)T_{12}(z) \\ T_{31}(z)R_0(z)T_{23}(z) & 0 & T_{31}(z)R_0(z)T_{12}(z) \\ T_{12}(z)R_0(z)T_{23}(z) & T_{12}(z)R_0(z)T_{31}(z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

С помощью уравнения (15) оказалось возможным изучить поведение резольвенты $R(z)$ при $\text{Im } z \neq 0$.

3. На основании изучения уравнения (14) при условии (6) можно получить, что для $t_{ij}(k, k', z)$ справедлива оценка

$$|t_{ij}(k, k', z)| \leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17)$$

равномерно по z в области

$$\delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta, \quad |\text{Im } z| \geq \delta, \quad \delta > 0. \quad (18)$$

Для записи оценок при изучении уравнения (15) удобно использовать функции

$$M_{ij}(p, p', \varepsilon) = (p_i^2 + p_j'^2 + 1)^{-1} \sum_{k < l}^3 [(1 + |p_k - p_k'|)(1 + |p_l - p_l'|)]^{1-\varepsilon}. \quad (19)$$

С помощью оценок (17) можно получить, что, например,

$$|(T_{23}(z) R_0(z) T_{31}(z))(p, p')| \leq CM_{12}(p, p', \varepsilon). \quad (20)$$

Естественно изучать уравнение (15) в классе матриц $\mathfrak{B}(z)$, для элементов которых справедлива оценка

$$|W_{ij}(p, p')| \leq CM_{ij}(p, p', \varepsilon), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Нетрудно сконструировать соответствующее банахово пространство $B(\varepsilon)$.

Результаты проведенного исследования уравнения (15) можно сформулировать следующим образом:

Пусть z меняется в области (18). Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Оператор $\mathfrak{U}(z)$ ограничен в $B(\varepsilon)$.

II. Однородное уравнение $\varphi + \mathfrak{U}(z)\varphi = 0$ не имеет нетривиальных решений в $B(\varepsilon)$.

III. Оператор $\mathfrak{U}^2(z)$ вполне непрерывен в $B(\varepsilon')$ при любом $\varepsilon' < \varepsilon$.

На основании одной теоремы С. М. Никольского⁽⁶⁾ из утверждения III следует, что к оператору $\mathfrak{U}(z)$ применима альтернатива Фредгольма, а из утверждения II следует, что уравнение (15) однозначно разрешимо в $B(\varepsilon')$.

Таким образом мы приходим к следующему основному результату:

Теорема. Пусть потенциалы V_{ij} удовлетворяют условию (6). Тогда резольвента оператора H имеет следующее строение:

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{i < j}^3 (R_{ij}(z) - R_0(z)) + R_0(z) W(z) R_0(z). \quad (22)$$

Здесь $R_0(z)$ и $R_{ij}(z)$ — резольвенты операторов H_0 и $H_{ij} = H_0 + V_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, соответственно, а $W(z)$ является интегральным оператором, для ядра которого справедлива оценка

$$|W(p, p')| \leq C \sum_{i, j=1}^3 M_{ij}(p, p', \varepsilon), \quad (23)$$

где $\varepsilon < \varepsilon_0$ в оценке (6), равномерно по z в области (18).

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 32, 1 (1953). ² А. Я. Повзнер, ДАН, 104, № 3, 360 (1955). ³ Т. К а т о, Comm. Pure and Appl. Math., 12, 403 (1959). ⁴ Т. I k e b e, Arch. Rat. Mech. Anal., 5, № 1, 1 (1960). ⁵ Л. Д. Ф а д д е е в, ЖЭТФ, 39, № 11, 1569 (1960). ⁶ С. М. Н и к о л ь с к и й, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, 147 (1943).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. В. ШАРИКАДЗЕ

**ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТНОЙ
ГИДРОДИНАМИКИ**

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 4 II 1961)

В настоящей работе рассматривается обтекание плоской пластинки нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, обладающей конечной электропроводностью. Перпендикулярно к плоскости пластинки действует внешнее постоянное магнитное поле с индуктивностью B_0 . Возникшее в жидкости индуцированное магнитное поле считаем пренебрежимо малым по сравнению с внешним магнитным полем. Уравнения магнитной гидродинамики при предположениях для пограничного слоя (согласно Россу (1)) будут иметь вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\sigma B_0^2}{\rho} v_x; \quad (2)$$

$$x \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\sigma B_0^2}{\rho c_p} v_x - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_p} v_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

где v_x , v_y — компоненты вектора скорости в пограничном слое; B_0 — величина внешнего вектора магнитной индукции; p — давление; ρ — плотность; σ — коэффициент электропроводности; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; α — коэффициент термической диффузии; ν — коэффициент вязкости; T — температура.

Будем считать, что число Прандтля $Pr = \nu/\alpha = 1$. Если обозначить $E = c_p T + v_x^2/2$, то из (2) и (3) получим, что

$$v \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{\partial E}{\partial t} = v_x \frac{\partial E}{\partial x} + v_y \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4)$$

Таким образом, задача состоит в определении v_x , v_y , E из уравнения (1), (2) и (3) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, 0) &= v_x^0(x, y), \quad v_y(x, y, 0) = v_y^0(x, y), \\ v_x(x, 0, t) &= v_y(x, 0, t) = 0, \quad v_x(x, \infty, t) = u_0(x, t), \\ E(x, y, 0) &= E^0(x, y), \quad E(x, 0, t) = E_{пл}(x, t), \quad E(x, \infty, t) = E_\infty(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь подразумевается, что вне пограничного слоя движение потенциально со скоростью $v_x = u_0(x, t)$, а давление не зависит от y и определяется из уравнения потенциального движения. Обозначим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(x, t), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = f_1(x, t). \quad (6)$$

В стационарном случае аналогичные задачи были рассмотрены Россом (1) и Сессом (2). В данной работе решение задачи приводится к интегральным

уравнениям, которые решаются последовательными приближениями. Этот метод можно обобщить и для решений задач магнитных пограничных слоев I и II рода, рассмотренных В. Н. Жигулевым (3). Если ввести функцию Грина для уравнений теплопроводности

$$G(y, \eta, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4\nu t}\right] + \int_0^t \frac{\exp\left[-\frac{\eta^2}{4\nu t} - \frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}\right]}{4\pi\nu\sqrt{\tau(t-\tau)^3}} d\tau, \quad (7)$$

то решение нашей задачи можно привести к следующим функциональным уравнениям (4):

$$v_x(x, y, t) = V_1(x, y, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} d\eta + v_x \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \right) G(y, \eta, t - \tau) d\eta; \quad (8)$$

$$E(x, y, t) = V_2(x, y, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(v_x \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} d\eta \right) G(y, \eta, t - \tau) d\eta, \quad (9)$$

где $V_i(x, y, t)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} - \frac{\partial V_i}{\partial t} = F_i(x, y, t), \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

и предельным условиям (5). В уравнения (2) и (3) подставлены значения

$$v_y = -\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad (11)$$

из уравнения неразрывности (1).

Можно показать, что если $a \leq x \leq b$, то для произвольной непрерывной функции $\Phi(x, y, t)$ имеет место формула

$$\Phi(x, y, t) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \int_a^b \Phi(\xi, y, t) e^{-(x-\xi)^2/z} d\xi, \quad (12)$$

тогда $a < x < b$.

Рассмотрим следующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned} u = \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u \right) G(y, \eta, t - \tau) e^{-(x-\xi)^2/z} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} + \\ + V_1(x, y, t); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h = \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(u \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta \right) G(y, \eta, t - \tau) e^{-(x-\xi)^2/z} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} + \\ + V_2(x, y, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (12), решение нашей задачи (8) и (9) получим из решений (13) и (14) при

$$\lim_{z \rightarrow 0} u = v_x, \quad \lim_{z \rightarrow 0} h = E, \quad \delta = 1.$$

Полагая $du/dx = v$, $du/dy = w$, $\partial h/\partial x = \varphi$, $\partial h/\partial y = \psi$, из (13) и (14) получим

$$\begin{aligned}
u &= \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(uv - w \int_0^\eta v d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u \right) G(y, \eta, t - \tau) e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} + \\
&\quad + V_1(x, y, t), \\
v &= \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(uv - w \int_0^\eta v d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u \right) G(y, \eta, t - \tau) e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{2(\xi-x)}{\sqrt{\pi z^3}} d\xi + \frac{\partial V}{\partial x}, \\
w &= \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(uv - w \int_0^\eta v d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u \right) \frac{\partial G}{\partial y} e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} + \frac{\partial V_1}{\partial y}, \\
h &= \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(u\varphi - \psi \int_0^\eta v d\eta \right) G e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} + V_2(x, y, t), \\
\varphi &= \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(u\varphi - \psi \int_0^\eta v d\eta \right) G e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{2(\xi-x)}{\sqrt{\pi z^3}} d\xi + \frac{\partial V_2}{\partial x}, \\
\psi &= \delta \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \left(u\varphi - \psi \int_0^\eta v d\eta \right) \frac{\partial G}{\partial y} e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} + \frac{\partial V_2}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Решение этой системы ищем в виде рядов

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u_n, & v &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n v_n, & w &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n w_n, \\
h &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n h_n, & \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \varphi_n, & \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \psi_n.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), для определения членов ряда получим следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}
u_0 &= V_1, & v_0 &= \frac{\partial V_1}{\partial x}, & w_0 &= \frac{\partial V_1}{\partial y}, \\
u_{n+1} &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \sum_{m=0}^n \left(u_{n-m} v_m - w_m \int_0^\eta v_{n-m} d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u_m \right) G e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}}, \\
v_{n+1} &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \sum_{m=0}^n \left(u_{n-m} v_m - w_m \int_0^\eta v_{n-m} d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u_m \right) G e^{-(x-\xi)^{1/2}} \times \\
&\quad \times \frac{2(\xi-x)}{\sqrt{\pi z^3}} d\xi, \\
w_{n+1} &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \sum_{m=0}^n \left(u_{n-m} v_m - w_m \int_0^\eta v_{n-m} d\eta + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u_m \right) \frac{\partial G}{\partial y} e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}}, \\
h_{n+1} &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \sum_{m=0}^n \left(u_{n-m} \varphi_m - \psi_m \int_0^\eta v_{n-m} d\eta \right) G e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}}, \\
\varphi_{n+1} &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \sum_{m=0}^n \left(u_{n-m} \varphi_m - \psi_m \int_0^\eta v_{n-m} d\eta \right) G e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{2(\xi-x)}{\sqrt{\pi z^3}} d\xi, \\
\psi_{n+1} &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\eta \int_a^b \sum_{m=0}^n \left(u_{n-m} \varphi_m - \psi_m \int_0^\eta v_{n-m} d\eta \right) \frac{\partial G}{\partial y} e^{-(x-\xi)^{1/2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}}.
\end{aligned}$$

Для доказательства сходимости рядов заметим, что имеют место следующие неравенства (⁴, ⁵):

$$\left| \int_0^t d\tau \int_0^\infty G d\eta \right|, \left| \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial y} d\eta \right|, \left| \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{dG}{dy} y d\eta \right| < M \sqrt{t},$$

$$\left| \int_a^b e^{-(x-\xi)^2/z} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi z}} \right|, \left| \int_a^b e^{-(x-\xi)^2/z} \frac{2(x-\xi)}{\sqrt{\pi z^3}} d\xi \right| < N,$$

$$|V_1|, \left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial V_1}{\partial y} \right|, \left| y \frac{\partial V_1}{\partial y} \right|, \left| \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \right| < L,$$

где M , N и L — постоянные.

Тогда

$$|u_n|, |v_n|, |w_n| < (n+2)! M^n L^{n+1} N^n t^{n/2} \frac{[\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)]^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)},$$

где Γ — гамма-функция. Отсюда получаем достаточный признак абсолютной и равномерной сходимости рядов при $\delta = 1$.

Аналогично можно показать сходимость рядов $|h_n|$, $|\varphi_n|$, $|\psi_n|$. После нахождения E и v_x легко определить распределение температуры в пограничном слое при наличии магнитного поля. Если магнитного поля нет, то $B_0 = 0$, и мы получаем решения задачи обычной гидродинамики (⁴).

Из (8) и (9) можно также получить решения, которые Россоу (¹) получил для случая, когда $v_x = u(y, t)$, $v_y = v_z = 0$, пренебрегая градиентом давления.

Тбилисский государственный университет
им. И. В. Сталина

Поступило
3 II 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ V. J. Rossow, NaCa Report., 1358 (1958). ² R. D. Cess, J. Heat Transfer (Trans. ASME, Ser. C), 82, № 2 (1960). ³ В. Н. Жигулев, ДАН, 124, № 5 (1959). ⁴ Д. Е. Долидзе, Сообщ. АН ГрузССР, 5, № 9 (1944). ⁵ Н. П. Дзоре-бенадзе, Д. В. Шарикадзе, ДАН, 133, № 2 (1960).

Т. В. ИВАНОВА, П. И. КУДРЯШОВ и Б. Я. СВЕШНИКОВ

О ДЛИТЕЛЬНОСТИ УЛЬТРАФИОЛЕТОВОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ НЕКОТОРЫХ АРОМАТИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Терениным 20 I 1961)

Многие органические соединения, интересные в научном и важные в практическом отношении, обладают ультрафиолетовой флуоресценцией. К ним, прежде всего, относятся бензол, его ближайшие производные.

Исследования спектров и выхода флуоресценции, а также спектров поглощения указанных соединений позволили получить ряд ценных сведений о свойствах возбужденных и невозбужденных состояний молекул этих соединений и некоторые сведения о процессах, в которых участвуют возбужденные молекулы. Однако, как показывает опыт изучения видимой флуоресценции, исследование длительности свечения дает более прямые и нередко более надежные сведения о механизме процессов, разыгрывающихся в возбужденном состоянии молекулы, и, во всяком случае, одно-временные измерения выхода и длительности флуоресценции дают возможность точнее судить об энергетике возбужденной молекулы, чем измерение одного выхода флуоресценции.

Цель настоящей работы и состояла в том, чтобы приспособить оптический часть разработанного А. М. Бонч-Бруевичем, В. А. Молчановым и В. И. Широковым (¹) фазового флуорометра к измерениям длительности ультрафиолетовой флуоресценции и определить значения длительности флуоресценции бензола и некоторых его производных.

Для возбуждения флуоресценции бензола и его метильных замещенных требуется область ультрафиолетового спектра короче 2700 Å. Вся оптика модуляционного узла флуорометра, разработанного указанными авторами была выполнена из кварца и алюминированных зеркал, поэтому в этой части возможность применения флуорометра для наших целей ограничивалась лишь источником возбуждения — ртутной лампой СВДШ-250.

Вследствие того, что в этой лампе разряд очень удален от стенок лампы в ее спектре излучения отсутствует область 2500—2600 Å. Мы применили для возбуждения флуоресценции ртутную лампу СВД-120, которая дает в указанной выше области спектра достаточно интенсивное излучение. При напряжении 140—160 в лампа горит устойчиво на постоянном токе.

Достаточно чистое выделение из ртутного спектра области короче 2700 Å представляет значительные трудности. Мы достигали этого с помощью интерференционного фильтра для резонансной линии ртути и вогнутой дифракционной решетки с радиусом кривизны 50 см, имеющей 1200 штрихов на 1 мм, дающей в первом порядке максимум энергии в области 2800 Å *. Входной щелью для монохроматора с дифракционной решеткой служила щель, имеющаяся на выходе модуляционного узла флуорометра.

Описанное устройство позволило хорошо отделить возбуждающее излучение от ближайшей к нему ультрафиолетовой области спектра 2700 Å в которой в основном производились измерения длительности флуоресценции.

Авторы выражают глубокую благодарность Т. Н. Крыловой за предоставление фильтра и Ф. М. Герасимову за изготовление решетки.

ции. Малая примесь рассеянного решеткой видимого света и рассеянное образцом возбуждающее излучение легко убирались с помощью светофильтра УФС-2, поставленного перед фотоумножителем.

Для регистрации исследуемой флуоресценции и сигнала сравнения был применен фотоумножитель ФЭУ-18.

В большинстве случаев возбуждение и наблюдение производилось с одной стороны. Концентрации активатора изменялись от $1 \cdot 10^{-2}$ моль/л для ярко флуоресцирующих до $2 \cdot 10^{-1}$ моль/л для слабо флуоресцирующих. Перепоглощение флуоресценции не учитывалось.

Из работ Боуэна и др. ⁽²⁾ известно, что флуоресценция большинства простых ароматических соединений довольно сильно тушится кислородом воздуха. В отдельных случаях, наряду с измерениями длительности флуоресценции в необезгаженных растворах, измеряли длительность свечения и в обезгаженных растворах *, но в подавляющем большинстве случаев измерения производились в необезгаженных растворах. Результаты наших измерений приведены в табл. 1.

Сравнение значений длительности флуоресценции бензола, его метильных замещенных и нафталина в обезгаженных и необезгаженных растворах в гексане и в спирте показывает, что найденное Боуэном и Вильямсом сильное падение выхода флуоресценции указанных соединений в присутствии кислорода воздуха сопровождается сильным уменьшением длительности флуоресценции.

Подробное рассмотрение вопроса о тушении флуоресценции ароматических соединений кислородом не входило в задачу данной работы, и мы ограничимся лишь рассмотрением одного случая — тушения флуоресценции нафталина в гексане. Если полученные данные для длительности флуоресценции нафталина в обезгаженном и необезгаженном растворе, данные о растворимости кислорода в гексане и приблизительные значения кинетических радиусов молекул нафталина и кислорода ** подставить в формулу диффузионного тушения ⁽³⁾, то, как показывают расчеты, мы получим для вероятности тушения при встрече 1,5—1,6, т. е. величину, довольно близкую к 1. Этот результат, по-видимому, можно рассматривать как хорошее подтверждение того, что кинетика тушения определяется диффузией молекулы кислорода в возбужденной молекуле нафталина.

Из табл. 1 видно, что длительность флуоресценции бензола в обезгаженном гексане равна $2,6 \cdot 10^{-8}$ сек. Выход флуоресценции раствора бензола в гексане по данным Боуэна и Вильямса равен 0,1—0,11. Поэтому, если считать, что причиной уменьшения выхода флуоресценции бензола являются какие-то внутримолекулярные процессы тушения, протекающие во времени и по таким законам, что уменьшение выхода пропорционально изменению длительности свечения, следует ожидать, что в отсутствие этого тушения длительность флуоресценции бензола будет равна $2,3 \cdot 10^{-7}$ сек.

С другой стороны, по данным Скляра ⁽⁴⁾ сила осциллятора для первой полосы абсорбции бензола равна $2,7 \cdot 10^{-3}$ ***. Отсюда по формуле ⁽⁶⁾

$$\tau = \frac{mc}{8\pi^2 e^2 \nu^2 f n^2}, \quad (1)$$

где c — скорость света, e — заряд электрона, m — его масса, n — показатель преломления среды и f — сила осциллятора, получаем, что длительность флуоресценции бензола должна быть равна $1,8 \cdot 10^{-7}$ сек. У толуола и параксилола, по данным Скляра, силы осцилляторов для первой полосы абсорбции равны $5,3 \cdot 10^{-3}$ и $12,5 \cdot 10^{-3}$. Для нафталина, по данным

* Обезгаживание раствора осуществлялось путем откачки воздуха форвакуумным насосом при последовательном замораживании и размораживании раствора.

** Следует отметить, что ошибка в значениях кинетических радиусов на десятки процентов мало влияет на результат вычислений.

*** По данным Мак Кляра ⁽⁵⁾ сила осциллятора для первой полосы абсорбции бензола равна $1,47 \cdot 10^{-3}$.

Значения длительности флуоресценции некоторых ароматических соединений

Флуоресцирующее вещество	Растворитель	$\tau \cdot 10^8$, сек.	Флуоресцирующее вещество	Растворитель	$\tau \cdot 10^8$, сек.
Бензол	Гексан	5,7	н-Бутилбензол	Гексан	6,8
	Гексан обезг.	26,0		Спирт	10,0
	Спирт	13,0		Гексан	6,0
Толуол	Гексан	5,8	Кумол	Спирт	10,6
	Гексан обезг.	26,0		Гексан	3,9
	Спирт	12,4		Спирт	4,3
Параксилोल	Спирт обезг.	24,0	Пентаметилбензол	Гексан	2,0
	Гексан	6,1		Гексан обезг.	6,0
	Гексан обезг.	28,0		Спирт	12,6
Ортоксилол	Спирт	13,0	Псевдокумол	Гексан	8,3
	Спирт обезг.	23,0		Гексан обезг.	103,0
	Гексан	6,0		Спирт	2,7
Метаксилол	Спирт	12,2	Анилин	Фенол	4,7
	Гексан	6,0		Спирт	2,0
	Спирт	12,4		Спирт	2,3
Этилбензол	Гексан	5,7	Гидрохинон	Спирт	10,0
	Спирт	11,1		Спирт	9,6
	Гексан	5,2		Спирт	3,0
н-Пропилбензол	Спирт	10,0	Трифенилметан	Спирт	19,0
				Спирт	
			Фенантрен	Спирт	
				Спирт	

Мак Клюра⁽⁵⁾, сила осциллятора равна $2 \cdot 10^{-3}$. Отсюда вычисленные по (1) длительности флуоресценции будут равны $1 \cdot 10^{-7}$ сек. для толуола, $6,3 \cdot 10^{-8}$ сек. для параксилора и $2,8 \cdot 10^{-7}$ сек. для нафталина. Измеренные нами значения длительности флуоресценции в обезгаженных растворах соответственно равны: $2,6 \cdot 10^{-8}$, $2,8 \cdot 10^{-8}$, $1,03 \cdot 10^{-7}$, а значения выходов тех же растворов по данным Боуэна и Вильямса равны 29,7% для толуола, 41,5% для параксилора и 37,5% для нафталина. Вычисленные из измерений выхода и измеренных значений длительности флуоресценции значения длительности свечения в отсутствие внутреннего тушения, следовательно, будут равны: $0,9 \cdot 10^{-7}$ сек. для толуола, $6,7 \cdot 10^{-8}$ сек. для параксилора и $2,7 \cdot 10^{-7}$ сек. для нафталина, т. е., как и в случае бензола, близки к значениям длительности, вычисленным по формуле (1).

Поступило
11 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Бонч-Бруевич, И. В. Каразин, В. А. Молчанов, В. И. Широков, Приборы и техн. эксп., 2, 53 (1959). ² E. Bowen, A. Williams, Trans. Farad. Soc., 35, 765 (1939); A. Dammers de Klerk, Molec. Phys., 1, 141 (1958). ³ Б. Я. Свешников, Acta physicochim. URSS, 1, 354 (1936); Л. А. Кузнецова, Б. Я. Свешников, В. И. Широков, Оптика и спектроскопия, 2, 578 (1957). ⁴ A. Sklar, J. Chem. Phys., 10, 135 (1942). ⁵ D. S. McClure, J. Chem. Phys., 17, 905 (1949). ⁶ R. Ladenburg, Zs. Phys., 4, 451 (1921); B. Stewens, Disc. Farad. Soc., 27, 34 (1959).

Л. М. ЛЯМШЕВ

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В АКУСТИКЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

(Представлено академиком Н. Н. Андреевым 28 I 1961)

В работе ⁽¹⁾ отмечалось, что принцип взаимности в акустике может быть сформулирован математически в виде ряда интегральных соотношений, связывающих решения двух самосопряженных краевых задач. В акустике движущейся среды могут быть получены соотношения, аналогичные в некотором смысле соотношениям взаимности, хотя, как известно, принцип взаимности в движущейся среде не выполняется ⁽²⁾. Эти соотношения связывают решения двух сопряженных краевых задач и устанавливают связь между объемными источниками, некоторыми поверхностными силами, действующими на упругие тонкие тела в движущейся среде, и звуковыми токами, обусловленными источниками и колебаниями упругих тел.

Рассмотрим произвольный объем Ω пространства, занятого однородным потоком газа, движущегося со скоростью V относительно выбранной системы координат. Допустим, что в Ω имеются неподвижные тонкие упругие тела — пластинки и цилиндрические оболочки, свободные или закрепленные в неподвижные, абсолютно жесткие экраны и расположенные в Ω так, что направления образующих оболочек и пластинок совпадают с направлением потока. Поверхность оболочки обозначим S_i , а контур закрепления Γ_i .

Пусть $p^{(1)}(\mathbf{r})$ представляет собой поле, создаваемое некоторой системой гармонических источников $Q^{(1)}(\mathbf{r})$ в Ω . Тогда $p^{(1)}(\mathbf{r})$ является решением уравнения

$$\Delta p^{(1)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p^{(1)}(\mathbf{r}) = -Q^{(1)}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Решение $p^{(1)}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения в бесконечно удаленных точках пространства Ω и краевым условиям

$$\frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{S_i} = -\rho \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w_i^{(1)}(\mathbf{r}) \equiv -M w_i^{(1)}(\mathbf{r}); \quad (2)$$

$$L_i w_i^{(1)}(\mathbf{r}) = F_i^{(1)}(\mathbf{r}) - p^{(1)}(\mathbf{r}) \Big|_{S_i}; \quad (3)$$

$$T_{ij}(w_i^{(1)}) = g_{ij}^{(1)} \Big|_{\Gamma}, \quad R_{ij}(w_i^{(1)}) = -f_{ij}^{(1)} \Big|_{\Gamma}, \quad \Gamma_i' + \Gamma_i'' = \Gamma_i. \quad (4)$$

Предположим, что имеется другая система источников $Q^{(2)}(\mathbf{r})$ и направление потока в Ω противоположно его направлению в первом случае. Создаваемое источниками $Q^{(2)}(\mathbf{r})$ поле $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению

$$\Delta \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \left(-i\omega - V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) = -Q^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

сопряженному с (1). Решение $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения, краевому условию

$$\frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{S_i} = -\rho \left(-i\omega - V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{w}_i^{(2)}(\mathbf{r}) \equiv -\tilde{M} \tilde{w}_i^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

и условиям (3) и (4), где верхний значок (1), как в уравнениях (3) и (6) заменен на значок (2).

В выражениях (2) — (6): \mathbf{n} — внешняя к S_i нормаль; $\mathbf{w}_i(\mathbf{r})$ — нормальные перемещения поверхности оболочки; $F_i(\mathbf{r})$ — сторонние механические гармонические силы, действующие на оболочку в направлении нормали g_{ij} , f_{ij} — сторонние силы, моменты, смещения и т. д., действующие на оболочку вдоль ее контура Γ_i (на краях оболочки); L_i — самосопряженный дифференциальный оператор, для которого справедлива формула Грина

$$\begin{aligned} & \int_{S_i} [\mathbf{w}_i^{(1)}(\mathbf{r}) L_i \tilde{\mathbf{w}}_i^{(2)}(\mathbf{r}) - \tilde{\mathbf{w}}_i^{(2)}(\mathbf{r}) L_i \mathbf{w}_i^{(1)}(\mathbf{r})] ds(\mathbf{r}) = \\ & = \int_{\Gamma_i} \sum_{j=1}^N [R_{ij}(\tilde{\mathbf{w}}_i^{(2)}(\mathbf{r})) T_{ij}(\mathbf{w}_i^{(1)}(\mathbf{r})) - T_{ij}(\tilde{\mathbf{w}}_i^{(2)}(\mathbf{r})) R_{ij}(\mathbf{w}_i^{(1)}(\mathbf{r}))] dl(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7)$$

M и \tilde{M} — сопряженные дифференциальные операторы, коммутирующие с оператором L_i ; R_{ij} и T_{ij} — также некоторые дифференциальные операторы, а N зависит от порядка дифференциального оператора L_i^* .

Умножим уравнение (1) на $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$, а уравнение (5) на $-p^{(1)}(\mathbf{r})$, сложим их и проинтегрируем обе части полученного равенства по объему Ω . Применяя формулу Грина к объемному интегралу в левой части равенства запишем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Q^{(1)}(\mathbf{r}) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^h \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \\ & = \int_{\Omega} Q^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^h \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} p^{(1)}(\mathbf{r}) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Пользуясь краевыми условиями для уравнений (1) и (5) и формулой (7) окончательно получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Q^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^h \int_{S_i} \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} F_i^{(2)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i'} \sum_{j=1}^N R_{ij} \left(\frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) g_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r}) + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i''} \sum_{j=1}^N T_{ij} \left(\frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) f_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} Q^{(1)}(\mathbf{r}) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}) + \\ & + \sum_{i=1}^h \int_{S_i} \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} F_i^{(1)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i'} \sum_{j=1}^N R_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) g_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r}) + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i''} \sum_{j=1}^N T_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) f_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (9)$$

* Заметим, что в случае тонких однородных стержней, пластин и цилиндрических оболочек кругового сечения операторы M и \tilde{M} коммутируют с оператором L_i , так как L_i является дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами. В других случаях существование коммутативности должно быть предварительно доказано.

Выражение (9) можно рассматривать как интегральное соотношение типа соотношения взаимности в акустике движущейся среды.

Рассмотрим частные случаи. Если $Q^{(1)}(\mathbf{r}) = Q^{(2)}(\mathbf{r}) = 0$, $F_i^{(1)}(\mathbf{r}) = F_i^{(2)}(\mathbf{r}) = 0$, $i = 2, 3, \dots, k$, то из выражения (8) следует

$$\int_S \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} p^{(1)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}), \quad (10)$$

а из (9) получим

$$\int_S \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} F^{(2)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} F^{(1)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Интегральное соотношение (10) известно как соотношение взаимности и теорема обращения потока в аэродинамике сжимаемого газа ⁽³⁾. Эта теорема широко используется для решения задач аэроупругости ⁽⁴⁾. Формула (11) по существу следует из интегрального соотношения (10) и справедлива, если операторы M и \tilde{M} коммутируют с оператором L_i .

Предположим, что

$$Q^{(1)}(\mathbf{r}) = F_i^{(2)}(\mathbf{r}) = g_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) = g_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = f_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) = f_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ F_i^{(1)}(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

Тогда получим

$$\int_{\Omega} Q^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} F^{(1)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Соотношение (12) связывает решения краевых задач дифракции звука на тонких упругих телах, находящихся в потоке газа, и излучения звука упругими телами в потоке, совершающими колебания под действием внешних сил.

Пусть

$$F_i^{(1)}(\mathbf{r}) = F_i^{(2)}(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ g_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) = g_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = f_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) = f_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

В этом случае на основании выражения (9) можно записать

$$\int_{\Omega_j} \tilde{Q}^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} Q^{(1)}(\mathbf{r}) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Формула (13) устанавливает связь между решениями двух сопряженных краевых задач дифракции звука на упругих телах в движущейся среде. Важно заметить, что соотношение (13) справедливо, когда в пространстве, занятом потоком, не имеется границ или имеются абсолютно мягкие и жесткие границы, как это видно из рассмотрения формулы (8), а также при наличии упругих границ, когда выполняются условия коммутативности операторов M , \tilde{M} и L_i . Если условия коммутативности не выполняются, выражение (13) несправедливо и должно быть заменено интегральным соотношением (8).

Как и выше, на основании формулы (9) могут быть получены интегральные формулы, связывающие решения задач дифракции и излучения звука оболочками в движущейся среде, когда оболочка совершает колебания под действием заданных на ее краях (контуре Γ_i) сторонних гармонических сил, моментов, смещений и т. п.

Отметим некоторые возможности применения полученных интегральных соотношений. В частности, из них следует, что решение задачи излучения звука оболочками, совершающими колебания под действием заданных сил, смещений, моментов, регулярно или статистически распределенных по поверхности или краям оболочки, сводится немедленно к вычислению ква-

дратур, если известно решение соответствующей однородной дифракционной задачи. В самом деле, пусть необходимо определить поле излучения $p^{(1)}(\mathbf{r})$ в некоторой точке \mathbf{r}_1 пространства Ω . Помещая в эту точку вспомогательный точечный источник $Q_0^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, поле которого $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ известно получим на основании (12)

$$p^{(1)}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{Q_0^{(2)}} \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} F^{(1)}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}). \quad (14)$$

В случае статистически распределенных сил запишем

$$\overline{|p^{(1)}(\mathbf{r}_1)|^2} = \frac{1}{\overline{|Q_0^{(2)}|^2}} \int_S \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}')}{\partial n} \frac{\partial p^{(2)*}(\mathbf{r}'')}{\partial n} \overline{F^{(1)}(\mathbf{r}') F^{(1)*}(\mathbf{r}'')} ds(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}''). \quad (15)$$

Аналогичные формулы могут быть получены в других случаях.

Если одно из решений, например $\tilde{p}^2(\mathbf{r})$, рассматривать как функцию источника для сопряженного уравнения с однородными краевыми условиями $F_i^{(2)}(\mathbf{r}) = f_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = g_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = 0$, то интегральное соотношение (9) представляет собой обобщенную формулу Грина для акустики движущейся среды.

В заключение отметим, что соотношение (9) может быть обобщено на случай нестационарных колебаний. Возможны и другие обобщения.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступило
23 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. М. Л я м ш е в, ДАН, 125, № 6, 1231 (1959). ² Л. А. Ч е р н о в, Тр. Ком. по акустике, № 6, 63 (1951). ³ R. T i m m a n, Encycl. of Phys., Fluid Dynamics, III, 1960, IX, p. 307. ⁴ Р. Л. Б и с п л и н г х о ф ф, Х. Э ш л и, Р. М. Х а л ф м э н, Аэроупругость, пер. с англ. под ред. Э. И. Григолюка, ИЛ, 1958, стр. 361.

М. М. МАКАРОВ и Н. А. ПЕРФИЛОВ

О ФРАГМЕНТАЦИИ НА ЛЕГКИХ ЯДРАХ

(Представлено академиком Б. П. Константиновым 3 II 1961)

Для выяснения механизма появления многозарядных частиц в ядерных расщеплениях нами отмечалась ранее⁽¹⁾ необходимость изучения фрагментации при энергиях протонов ниже и около порога для образования мезонов. В настоящей заметке приводятся краткие результаты такого исследования.

Ядерные фотоэмульсии П-9 (r) облучались выведенным пучком протонов на синхроциклотроне Объединенного института ядерных исследований. Энергии протонов были равны 100; 200 и 350 Мэв. В фотопластинках исследовались звезды, содержащие треки многозарядных частиц. Ниже приводятся результаты измерений.

1) Сечения образования фрагментов с зарядом $Z \geq 4$ и с пробегом $l \geq 15 \mu$ на ядрах C, N, O равны $0,50 \pm 0,34$; $0,92 \pm 0,54$ и $60 \pm 0,38$ мбн для энергий протонов 100; 200 и 300 Мэв соответственно.

2) Наиболее вероятный пробег в пределах экспериментальных ошибок одинаков для энергий протонов 100 и 200 Мэв.

3) Все фрагменты направлены в переднюю полусферу по отношению к направлению пучка протонов. Чем меньше энергия протонов, тем направленность вперед ярче выражена (см. рис. 1).

4) В табл. 1 дано угловое распределение каскадных протонов ($E_p > 20 \div 30$ Мэв) в звездах с фрагментами относительно пучка. Там же приведены расчетные по методу Монте-Карло⁽²⁾ и экспериментально определенные для обычных (без фрагментов) звезд на легких ядрах угловые распределения каскадных нуклонов, которые совпадают.

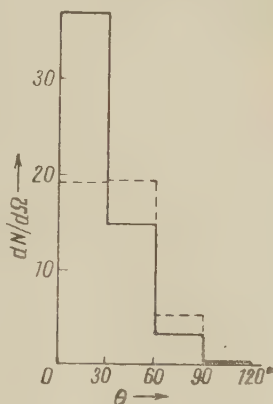


Рис. 1. Угловое распределение фрагментов при энергиях протонов 100 Мэв (сплошная линия) и 200 Мэв (пунктир)

Таблица 1

Угол в град.	0—20	20—40	40—60	60—80	80—100	100—120	>120
Число протонов	Эксп. (2)	11	22	7	8	3	1
	Расчет. (2)	12	24	8	2	—	2
	Эксп. наст. работа	2	8	13	10	8	7
							14

Как видно из табл. 1, наблюдаемое нами распределение резко отличается от приведенного в работе⁽²⁾ в основном за счет значительного вклада углов $>120^\circ$. Этот факт можно истолковать как следствие того, что ядерный каскад не всегда идет через чисто нуклон-нуклонные соударения, а и через соударения типа нуклон — подструктура. В этом случае появление фрагментов есть результат квазиупругого рассеяния протонов — падающих или возникающих в процессе развития каскада на подструктурах ядра.

Заметим, что такая точка зрения не противоречит экспериментальным фактам работы ⁽³⁾, в которой найдено, что сечение рассеяния протонов с энергиями 350—600 Мэв на угол $180 \pm 15^\circ$ после столкновения с подструктурой из 8—12 нуклонов не больше $3 \cdot 10^{-33}$ см²/стерад. Действительно, есть основания предполагать ⁽⁴⁾, что при увеличении энергии протонов (свыше 100 Мэв) вероятность их взаимодействия с подструктурами будет уменьшаться. Поэтому и измеренное в работе ⁽³⁾ сечение квазиупругого рассеяния оказалось столь малым. Это следует также из того факта ⁽⁵⁾, что дифференциальное сечение упругого ($\rho\alpha$) взаимодействия $ds/d\Omega$ при углах рассеяния протонов 165° — 180° уменьшается примерно в 20 раз при переходе от энергии протонов 95 Мэв к энергии 147 Мэв (для угла 165° $ds/d\Omega$ равно $6,9 \cdot 10^{-30}$ и $1,24 \cdot 10^{-28}$ см²/стерад при энергиях протонов 147 и 95 Мэв соответственно).

В заключение можно добавить, что наши результаты не отвергают полностью другие вероятные механизмы фрагментации, такие как pick up или развал ядра, однако они более соответствуют возможности образования фрагментов при квазиупругом рассеянии нуклонов на подструктурах ядра.

Радиевый институт им. В. Г. Хлопина
Академии наук СССР

Поступило
24 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ У. Р. Арифханов, М. М. Макаров, Н. А. Перфилов, В. П. Ша-
мов, ЖЭТФ, 38, 115 (1960). ² H. Muirhead, W. Rosser, Phil. Mag., 46, 652
(1955). ³ Г. А. Лексин, Ю. П. Кумекин, ЖЭТФ, 33, 1147 (1957).
⁴ В. И. Остроумов, Р. А. Филов, ЖЭТФ, 37, 643 (1959). ⁵ A. M. Cormack,
J. N. Palmieri, N. F. Ramsey, R. W. Wilson, Phys. Rev., 115, 599 (1959);
W. Selove, J. M. Teem, Phys. Rev., 112, 1658 (1958).

Л. И. РУДАКОВ и Р. З. САГДЕЕВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 28 I 1961)

Экспериментальные исследования по омическому нагреву плазмы током, направленным вдоль сильного магнитного поля (¹, ²), показывают, что в плазме развиваются неустойчивости, не объяснимые в рамках идеальной магнитной гидродинамики. В работах (², ³) предлагается интерпретация этих явлений на основе кинетической теории как раскачка электронами, переносящими ток вдоль магнитного поля, так называемых «ионных звуковых» колебаний. Возникновение такой неустойчивости, однако, возможно лишь в сильно неизотермической плазме, в которой электроны значительно горячее ионов

$$T_e \gg T_i$$

(T — температура).

В (⁴) предлагается механизм неустойчивости в рамках гидродинамики, но при учете конечности проводимости. В условиях, когда длина свободного пробега электронов сравнима с характерными размерами установки, роль этой неустойчивости уменьшается.

Ниже рассматривается механизм неустойчивости, возникновение которой не связано с условием неизотермичности плазмы и с обязательным наличием продольного электрического тока.

Примем следующие допущения: 1) давление плазмы мало в сравнении с магнитным $p \gg H^2/8\pi$; 2) неустойчивость развивается за время, меньшее времени столкновения; 3) частота раскачивающихся колебаний значительно меньше циклотронной частоты ионов $\omega \ll eH/Mc$, а длины волн возмущений λ значительно больше ларморовского радиуса иона $\lambda \gg r_H$; 4) $H^2/8\pi \ll nMc^2$.

Пусть магнитное поле \mathbf{H} всюду направлено по оси z , а величины, характеризующие стационарное состояние плазмы, меняются в направлении x . Будем рассматривать малые возмущения стационарного состояния, имеющие вид

$$A(x) \exp i(k_z z + k_y y - \omega t).$$

Тогда поправки к функциям распределения электронов и ионов, найденные из решения линеаризованного кинетического уравнения (для электронов и ионов соответственно), будут иметь вид (⁵)

$$f_\alpha = -i \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z} + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} \right) \frac{1}{\omega - k_z v_z}; \quad (1)$$

$\alpha = i, e$ (электроны, ионы); f_0 — невозмущенное распределение. Здесь существенно использовалось условие 3), при выполнении которого движение частиц поперек силовых линий магнитного поля является дрейфовым: $\mathbf{V}_\perp = c [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]/H^2$.

Поскольку рассматриваются частоты меньше ларморовской ионной, а следовательно, заведомо меньше и ионной лэнгмюровской $(4\pi ne^2/M)^{1/2}$,

плазму можно считать квазинейтральной. Тогда в уравнении, связывающем изменение во времени плотности пространственного заряда ρ с плотностью тока \mathbf{j} : $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, можно опустить первый член:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2)$$

Возмущение плотности тока \mathbf{j} выражается следующим образом: продольная компонента по определению имеет вид $j_z = e_\alpha \int v f_\alpha dv$; поперечная же компонента в случае сильного магнитного поля и малых частот (условие 3)) может быть выражена непосредственно через электрическое поле с помощью так называемой «статической» диэлектрической проницаемости $\epsilon_\perp = 4\pi n M c^2 / H^2$:

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\epsilon_\perp}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t} = -\frac{i\omega}{4\pi} \epsilon_\perp \mathbf{E}_\perp. \quad (3)$$

Наконец, в интересующей нас задаче можно ввести еще одно упрощение: считать электрическое поле потенциальным $\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\varphi$. Это справедливо при выполнении неравенства $E \gg \frac{1}{c} \omega A$ или (выражая A через плотность тока \mathbf{j} из уравнения $\Delta A = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$)

$$E \gg \frac{4\pi}{c^2} \frac{j}{k^2}. \quad (4)$$

Для поперечных компонент, используя соотношение (3), неравенство (4) можно свести к следующему:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{H^2}{4\pi n M}.$$

Это означает, что мы ограничиваемся возмущениями, распространяющимися с фазовыми скоростями, значительно меньшими альфвеновской скорости. Продольная же компонента (4), как показывает оценка, вывод которой мы не приводим (он является более громоздким), сводится к условию

$$\frac{\omega^2}{k_z^2} \ll \frac{H^2}{4\pi n M}.$$

Теперь, используя уравнения (1) — (3) и условие потенциальности электрического поля, после несложных вычислений получаем уравнение для возмущения скалярного потенциала φ

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - F(\omega, k, x) \varphi = 0, \quad (5)$$

где

$$F(\omega, k, x) = \frac{\omega_H^2}{\omega} k_z^2 \int \frac{v_z dv_z}{\omega - k_z v_z} \left\{ \left[\frac{M}{m} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_z} \right] + \frac{k_y}{k_z} \frac{1}{\omega_H} \frac{\partial}{\partial x} (f_{0i} - f_{0e}) \right\} \\ \left(\omega_H = \frac{eH}{Mc} \right).$$

(При взятии интегралов в этом выражении полюса подынтегральной функции нужно обходить снизу.)

В однородной плазме (5) дает известное дисперсионное уравнение «ионных звуковых» колебаний

$$\int \frac{v_z dv_z}{\omega - k_z v_z} \left[\frac{M}{m} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_z} \right] = 0.$$

В неоднородной же плазме нужно искать решения уравнения (5) для φ , убывающего в обе стороны (при $x \rightarrow \pm \infty$). Вместе с этим требованием уравнение (5) определяет собственные значения ω .

Такого типа решениями являются локальные решения вблизи точки x , где

$$F(\omega, k, x) = 0. \quad (6)$$

В окрестности таких x уравнение (5) принимает, вообще говоря, вид уравнения Эйри от комплексного аргумента (так как ω — комплексная величина). Такое уравнение имеет решения, затухающие в обе стороны от точки, где $F(\omega, k, x) = 0$. (Эта точка аналогична «точке поворота» в уравнении Шредингера для одномерного движения.)

В уравнении (6), играющем роль «дисперсионного» уравнения и в неоднородной плазме, слагаемое с $\frac{\partial}{\partial x}(f_{0i} - f_{0e})$ может стать существенным даже при малой неоднородности, если $k_y \gg k_z$.

Применение изложенных выводов к случаю, когда распределение частиц по скоростям является максвелловским

$$f_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T/m_\alpha}} e^{-m_\alpha v_\alpha^2/2T} \quad (T_i = T_e = T)$$

n и T — функции координаты x), приводит к следующим результатам:

1. Если $n(x) = \text{const}$, $T(x) \neq \text{const}$, то для частот в интервале $\sqrt{\frac{T}{M}} \ll \frac{\omega}{k} \ll \sqrt{\frac{T}{m}}$ и при условии $\frac{k_y^2}{k_z^2} \left(\frac{d \ln T}{dx} \right)^2 r_H^2 \gg 1$ уравнение (4) принимает вид

$$\omega^3 + \frac{k_y}{k_z} \frac{d \ln T}{dx} k_z^3 \frac{2T^2}{M^2 \omega_H} = 0. \quad (7)$$

Здесь всегда имеется корень $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2i) \left(\frac{k_y}{k_z} \frac{d \ln T}{dx} k_z^3 \frac{2T^2}{M^2 \omega_H} \right)^{1/3}$, дающий

неустойчивость. Заметим, что ограничение интервалом частот $\sqrt{\frac{T}{M}} \ll \frac{\omega}{k} \ll \sqrt{\frac{T}{m}}$, как известно из теории ионных колебаний однородной плазмы,

эквивалентно гидродинамическому приближению, в котором показатель диабаты γ для электронного газа равен 1. Можно показать, что результаты этого пункта и для неоднородной плазмы содержатся в гидродинамическом подходе. Соответственно уравнение (7) не исчерпывает всех корней дисперсионного уравнения (6).

2. Если $T(x) = \text{const}$, $n(x) \neq \text{const}$, исследование уравнения (6) показывает, что имеющиеся комплексные корни соответствуют затуханию колебаний (плазма устойчива).

Неустойчивость при переменной температуре можно интерпретировать следующим наглядным образом. В однородной плазме «ионная электростатическая» волна представляет собой колебания (звук), распространяющиеся вдоль силовых линий магнитного поля \mathbf{H} . В неоднородной плазме ($T(x) \neq \text{const}$) в «косой» волне ($k_z, k_y \neq 0$) поперечное движение со скоростью $c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]/H^2$ приводит к переносу тепла. Можно выбрать направление распространения волны, знак k_y/k_z , таким образом, чтобы в фазу «сгущения» плазмы в волне, где возрастает температура, непрерывно поступал приток тепла из области с большей невозмущенной температурой. Это и будет служить причиной, приводящей к нарастанию колебаний.

Авторы выражают благодарность акад. М. А. Леонтовичу за полезную критику и советы.

Поступило
27 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. A. Ellis, L. P. Goldberg, I. G. Gorman, Phys. Fluids, **3**, 468 (1960).
² L. Spitzer, Phys. Fluids, **3**, 659 (1960). ³ I. B. Bernstein, E. A. Frieman et al., Phys. Fluids, **3**, 136 (1960). ⁴ B. B. Kadomtsev, A. V. Nedospasov, Nuclear. Energy, Part C, **1**, 230 (1960). ⁵ Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ, **37**, 1337 (1959).

В. Л. ПОКРОВСКИЙ

ОБЩИЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 2 II 1961)

До настоящего времени задача об оптимальной диаграмме направленности была решена лишь для весьма узкого класса линейных антенн с равноудаленными излучателями и варьируемыми токами (¹⁻³). Управление амплитудами и фазами токов является технически весьма сложной задачей. Антенны с эквидистантными излучателями неустойчивы по отношению к изменениям частоты и токов, поэтому качание луча в такой антенне является трудной задачей. Наконец, вполне естественно стремление добиться большой направленности антенны при возможно меньшем числе излучателей. Этого можно добиться, варьируя одновременно и токи и расстояния между излучателями. Для выяснения вопроса о том, чего можно достичь на таком пути, необходимо решить соответствующую задачу об оптимуме.

Следует также подчеркнуть, что в работах (¹⁻³) отдельные излучатели считались изотропными. Если не пренебрегать направленностью отдельного излучателя, то можно получить более выгодные оптимальные диаграммы направленности.

Цель настоящей заметки — указать общий принцип отыскания параметров линейной антенны, с помощью которого задача о нахождении оптимального распределения этих параметров принципиально сводится к численному счету. В такой общей постановке можно рассматривать не только дискретные, но и непрерывные распределения токов, не имеющие особенностей, если задавать их в виде конечных сумм Фурье.

Пусть диаграмма направленности антенны $F(\cos \vartheta)$ зависит от некоторых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Будем рассматривать диаграммы с заданным отношением R уровня главного луча к боковым лепесткам. Среди всех этих диаграмм требуется найти ту, у которой наименьшая ширина главного луча (например, на уровне боковых лепестков, который мы примем за единицу).

Для простоты примем направление главного луча $\vartheta = \pi/2$ и будем считать F четной функцией от аргумента. Ширину главного луча обозначим ϑ^* и введем обозначение $u^* = \cos \vartheta^*$. Пусть $u_i = \cos \vartheta_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) соответствуют направлениям боковых лепестков с уровнем, равным единице. Получим систему уравнений

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{u_i} = 0; \quad F(u_i) = (-1)^i. \quad (1)$$

Если один из боковых лепестков направлен вдоль антенны ($u = 1$), то система (1) дополнится уравнением:

$$F(1) = (-1)^{m+1}. \quad (1')$$

Число боковых лепестков будет максимально возможным, если система (1) полностью определяет значения α_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Приравняв число неизвестных $n + m$ числу уравнений $2m$ или $2m + 1$, получим:

$$m_{\text{extr}} = \begin{cases} n & \text{в случае (1);} \\ n - 1 & \text{в случае (1').} \end{cases} \quad (2)$$

Мы утверждаем, что уравнения (1) или (1) и (1') определяют оптимальный выбор параметров. Действительно, пусть число боковых лепестков, достигающих единичного уровня, меньше максимально возможного. Тогда потребуем выполнения равенства

$$F(u^* - \delta) = 1 \quad (\delta > 0). \quad (3)$$

При этом экстремумы (направления боковых лепестков) слегка сместятся из точек u_i в точки $u_i + \delta_i$. Подбором изменений параметров α_k добьемся того, чтобы новые экстремумы по-прежнему равнялись единице. При этом получим $2m + 1$ или $2m + 2$ уравнений с $n + m$ неизвестными. Если $m < m_{\text{extr}}$, то эта система для не слишком больших δ имеет решение и, таким образом, главный луч можно сузить, не изменяя уровня боковых лепестков.

Таким образом, мы убедились, что оптимальная в указанном смысле диаграмма направленности всегда содержит максимально возможное число ($n - 1$ или n) одинаковых по уровню боковых лепестков.

Уравнения (1) или (1) и (1') в принципе позволяют найти оптимальные значения параметров. Для иллюстрации приведем решения простейших задач.

1. Антенна, состоящая из 4 неэквидистантных излучателей с одинаковыми амплитудами и фазами. Диаграмма направленности $F(\cos \vartheta)$ такой антенны имеет вид

$$F(\cos \vartheta) = 1/2 (\cos x_1 u + \cos x_2 u). \quad (4)$$

Здесь $u = \pi \cos \vartheta$; x_1, x_2 — расстояния от излучателей до центра антенны в долях полуволны. (Мы использовали другую нормировку $F(0) = 1$.)

В данном случае уравнения (1), (1') дают

$$\cos x_1 u_1 + \cos x_2 u_1 = -2\mu,$$

$$x_1 \sin x_1 u_1 + x_2 \sin x_2 u_1 = 0, \quad (\mu = \frac{1}{R})$$

$$\cos x_1 \pi + \cos x_2 \pi = 2\mu. \quad (5)$$

Здесь u_1 соответствует направлению одного из боковых лепестков; другой боковой лепесток направлен вдоль антенны.

Мы приводим решения уравнений (5) для трех значений μ . Соответствующие диаграммы направленности показаны на рис. 1.

Сравнение полученных диаграмм с известными чебышевскими распределениями Дольфа (1) при $d = \lambda/2$, том же числе излучателей и тех же значениях R показывает, что ширина луча во всех случаях практически одинакова. Общая длина антенны по сравнению с чебышевской ($1,5 \lambda$) в случаях $\mu = 0,025; 0,093$ уменьшается (соответственно $1,14 \lambda, 1,33 \lambda$), а в случае $\mu = 0,194$ незначительно увеличивается.

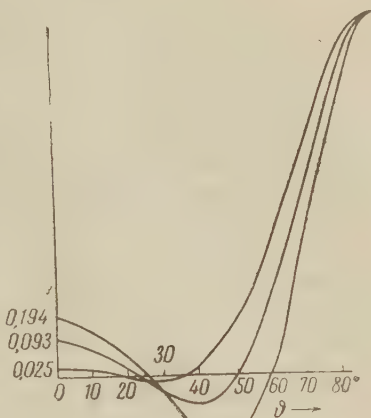


Рис. 1

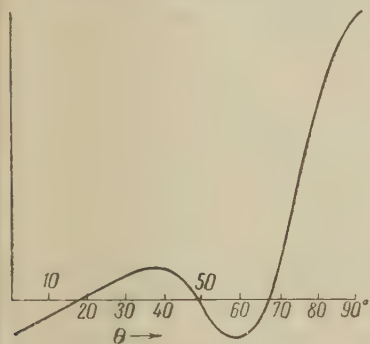


Рис. 2

2. Антенна с 6 излучателями. Здесь $F(\cos \vartheta)$ и уравнения (1), (1') примут вид

$$F = 1/3 (\cos x_1 u + \cos x_2 u + \cos x_3 u), \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 \cos x_i u_k = (-1)^k 3\mu \quad (k = 1, 2, 3); \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i \sin x_i u_k = 0 \quad (k = 1, 2),$$

где $u_3 = \pi$. Численное решение этих уравнений для $\mu \simeq 0,13$ дает $x_1 = 0,47$, $x_2 = 1,22$; $x_3 = 2,41$. Соответствующая диаграмма направленности показана на рис. 2. Неэквидистантная антенна и на этот раз оказалась короче чебышевской, дающей ту же ширину луча при том же μ .

Предварительные эксперименты, проведенные Ю. А. Вайнером на 4-элементном макете, по-видимому, подтверждают предсказания теории.

В настоящее время разрабатывается методика численного расчета и асимптотические методы, пригодные для большого числа излучателей и больших значений R .

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. Н. Мейману за ценный совет, А. М. Дыхне, В. А. Топоногову, Ю. А. Вайнеру за обсуждение, М. Г. Фадиенко и Т. М. Артеменок, численно решившим уравнения для 4 и 6 излучателей.

Институт радиофизики и электроники
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
30 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ C. L. Dolph, Proc. IRE, **34**, 335 (1946). ² H. J. Riblett, Proc. IRE, **35**, 489 (1947). ³ В. Л. Покровский, ДАН, **109**, 769 (1956); Радиотехн. и электроника, **2**, 389, 559, 1550 (1957).

Л. Н. ГУТМАН и Л. Н. МАЛЬКО

К ТЕОРИИ ФРОНТОВ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 11 I 1961)

На основе решения уравнений гидродинамики атмосферы, развивая идеи Маргулеса (¹), А. Ф. Дюбюка (²) и др.) и главным образом Ф. К. Болла (³), попытаемся найти форму фронтальной поверхности, разделяющей две термически различные воздушные массы, а также изучить движение воздуха, которое может иметь место вблизи и непосредственно на этой поверхности.

С этой целью упростим систему уравнений гидродинамики атмосферы на основе следующих предположений: 1) горизонтальные масштабы движения имеют порядок $10^2 - 10^3$ км (это позволяет нам воспользоваться декартовой правосторонней системой координат (x, y, z) , где x, y направлены по горизонтали, z — вверх, и применить уравнение статики); 2) возмущения температуры и давления малы по сравнению со средними для данной высоты значениями этих метеозлементов; 3) можно пренебречь ускорениями в уравнениях движения; 4) все элементы движения не зависят от y , и, следовательно, фронтальная поверхность (на которой имеет место разрыв температуры) является цилиндрической поверхностью с образующей, направленной вдоль y ; 5) фронтальная поверхность перемещается, не изменяя своей формы, в положительном направлении оси x с постоянной заданной скоростью c (всегда $c \geq 0$). Тогда в системе координат, движущейся вместе с фронтом (начало координат поместим на поверхность Земли где-либо под фронтальной поверхностью), процесс может рассматриваться как стационарный.

После всех упрощений придем к следующей исходной системе уравнений:

$$-R\theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'_k}{P} \right) + l(v_k - v_g) + \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = 0; \quad (1)$$

$$-l(u_k - u_g) + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_k e^{-\sigma z}}{\partial x} + \frac{\partial w_k e^{-\sigma z}}{\partial z} = 0 \quad \left(\sigma = \frac{g - R\gamma}{R\theta} \right); \quad (3)$$

$$R\theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'_k}{P} \right) = \lambda \theta_k \quad \left(\lambda = \frac{g}{\theta} \right). \quad (4)$$

Здесь u_k, v_k и w_k — составляющие скорости воздуха (относительно Земли) вдоль осей x, y, z соответственно; θ_k, p'_k — отклонения температуры и давления воздуха от средних для данной высоты значений этих метеозлементов θ и P (плотность воздуха исключена из системы при помощи уравнения Клапейрона); u_g и v_g — составляющие геострофического ветра, которые мы будем считать заданными и постоянными. Индексы $k = 1$ и $k = 2$ относятся к холодной и теплой воздушным массам, расположенным соответственно под и над фронтальной поверхностью; g — ускорение силы тяжести; $\gamma = 2\omega \sin \varphi$, где ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места; ν — кинематический коэффициент турбулентной вязкости (величины l и ν считаем постоянными); R — газовая постоянная для воздуха.

Сделаем еще одно существенное предположение, а именно: допустим, что возмущения температуры известны, и зададим их в форме $\vartheta_1 = \Delta\theta - z\Delta\gamma$, $\vartheta_2 = 0$, где $\Delta\theta$ — разность температур у поверхности Земли теплой и холодной воздушных масс; $\Delta\gamma$ — разность вертикальных градиентов температуры этих масс. Будем считать величины $\Delta\theta$ и $\Delta\gamma$ заданными и постоянными.

Краевые условия задачи будут следующими:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (5)$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_2}{\partial z} \quad \text{при } z = h(x); \quad (6)$$

$$w_1 = w_2 = (u_1 - c) h'(x), \quad p'_1 = p'_2 \quad \text{при } z = h(x); \quad (7)$$

$$u_2 = u_g, \quad v_2 = v_g, \quad p'_2 = 0 \quad \text{при } z = \infty, \quad (8)$$

где $h(x)$ — высота фронтальной поверхности, подлежащая определению при решении задачи.

Интегрируя уравнение (4) и удовлетворяя условиям (7), (8) для p'_k , находим

$$\frac{p'_1}{P} = \frac{1}{R\theta} \left[\mu(h - z) + \frac{1}{2} m(h^2 - z^2) \right], \quad p'_2 \equiv 0, \quad (9)$$

где $\mu = -\lambda\Delta\theta > 0$, $m = \lambda\Delta\gamma$. Тогда уравнение (1) принимает вид *

$$l(v_k - v_g) + \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = \mu h'(x) + m h h'(x) \quad (10)$$

(при $k = 2$ правую часть этого уравнения следует заменить нулем).

Проинтегрировав (3) по z от 0 до h с учетом (5), (7), вместо этого уравнения получим интегральное условие

$$\int_0^h (u_1 - c) e^{-\sigma z} dz = \frac{Q}{\rho_0}, \quad (11)$$

где ρ_0 — плотность воздуха вблизи поверхности Земли; Q — постоянная интегрирования, с физической точки зрения представляющая собой количество воздуха в килограммах, проникающего в 1 сек. из теплой воздушной

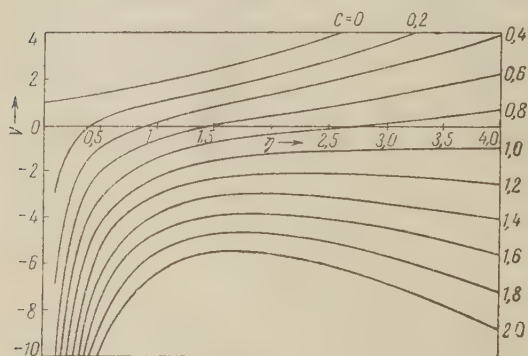


Рис. 1

массы в холодную, отнесенное к погонному метру фронтальной поверхности. Если фронт опирается на Землю, то, очевидно, $Q = 0$. Если фронт не доходит до Земли, как, например, в случае теплого фронта, который, как известно, часто тянет за собой пленку холодного воздуха, то определение Q затруднительно. Однако ясно, что по сравнению с общим количеством перемещающегося в системе фронта воздуха Q должно быть незначительным ⁽³⁾. Поэтому мы будем полагать $Q = 0$ всегда, допуская при этом в ряде случаев небольшую погрешность.

Теперь можно указать путь решения поставленной задачи. Сначала из уравнений (2), (10), удовлетворяя условиям (5), (6), (8), находим u_k и v_k

* Нетрудно убедиться в том, что при $m = \nu = 0$ уравнение (10) приводит к известной формуле Маргулеса (4).

(решение этой системы осуществляется проще всего путем построения одного уравнения для $U = u_k + iv_k$).

В данной заметке мы ограничимся рассмотрением случая, когда можно положить $\gamma_1 = \gamma_2$ ($m = 0$) и $\sigma = 0$. Последнее упрощение не может внести большой погрешности в расчеты для участка фронта, лежащего в пределах нижних 3 км.

Поскольку выкладки элементарны, мы приведем лишь окончательные формулы:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 + B(\eta - \xi), & u_2 &= u + e^{-\xi} [A(\eta) \sin \xi - B(\eta) \cos \xi], \\ v_1 &= v_2 - A(\eta - \xi), & v_2 &= v + e^{-\xi} [B(\eta) \sin \xi + A(\eta) \cos \xi]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь обозначено $\xi = z\sqrt{l}/\sqrt{2v}$; $\eta = h\sqrt{l}/\sqrt{2v}$; $A(\varphi) = (\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi - 1) \times \times u_g d\varphi/d\xi$; $B(\varphi) = \operatorname{sh} \varphi \sin \varphi u_g d\varphi/d\xi$; $\xi = xlu_g\sqrt{l}/\mu\sqrt{2v}$; $u = u_g(1 - e^{-\xi} \cos \xi) - v_g e^{-\xi} \sin \xi$; $v = u_g e^{-\xi} \sin \xi + v_g(1 - e^{-\xi} \cos \xi)$. Имея u_k , из (3), (5) и (7) путем квадратуры находим w_k (за недостатком места формулы не выписываем), после чего, подставляя u_1 в (12) и затем интегрируя, приходим к уравнению для определения η :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{1 + V - 2(1 - C)\eta - e^{-\eta} [(V + 1) \cos \eta + (V - 1) \sin \eta]}{3/2 - 2e^{-\eta} (\cos \eta + \sin \eta) + 1/2 e^{-2\eta} (\cos 2\eta + \sin 2\eta)}, \quad (13)$$

где обозначено $V = v_g/u_g$; $C = c/u_g$.

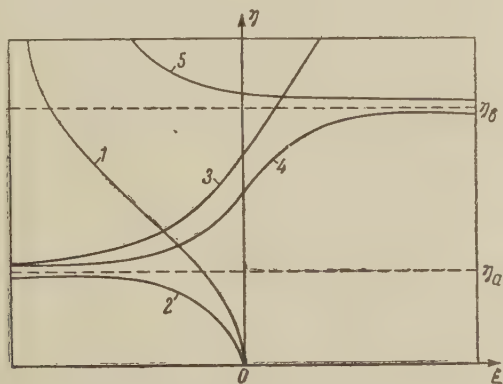


Рис. 2

Численное интегрирование (13) элементарно, однако необходимо предварительно установить характер его интегральных кривых. Начнем

с исследования поведения решения при $\eta \rightarrow 0$. Разлагая правую часть в ряд по степеням η , получим $\eta'(\xi) = 1/2 [1 - 3C\eta^{-2} + 3(1 - V)(2\eta)^{-1} + V + \dots]$. Для достаточно малых η можно отбросить все члены, кроме первого. Тогда, интегрируя получившееся уравнение при условии $\eta(0) = 0$, будем иметь $\eta = (-4,5C\xi)^{1/2}$. В силу того, что $C > 0$ и $\eta \geq 0$, должно быть $\xi \leq 0$. Это значит, что из движущихся фронтов опираться на Землю может только холодный фронт, причём

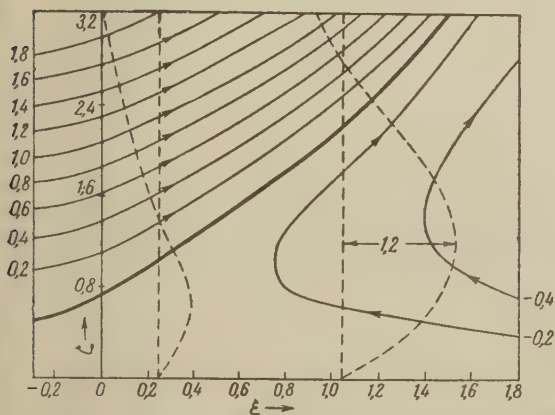


Рис. 3

участок фронтальной поверхности, непосредственно прилегающий к Земле, должен составлять с ней прямой угол *. Можно показать, что знаменатель дроби в (13) обращается в нуль только при $\eta = 0$, а числитель может иметь один или два нуля. Следовательно, интегральные кривые могут иметь одну или две асимптоты (или же не иметь их вообще). Значения $\eta = \eta_a$ и $\eta = \eta_b$ ($\eta_b > \eta_a$), на которых фронтальные поверхности становятся горизонтальными, легко найти графически по заданным V и C при помощи кривых $C = \text{const}$ на рис. 1.

Дальнейший анализ показывает, что в зависимости от наличия или отсутствия асимптот интегральные кривые уравнения (13) могут быть 5 типов. Схематически возможные типы интегральных кривых ** даны на рис. 2. Кривые 1 и 2 соответствуют холодным фронтам, кривые 3 и 4 — теплым.

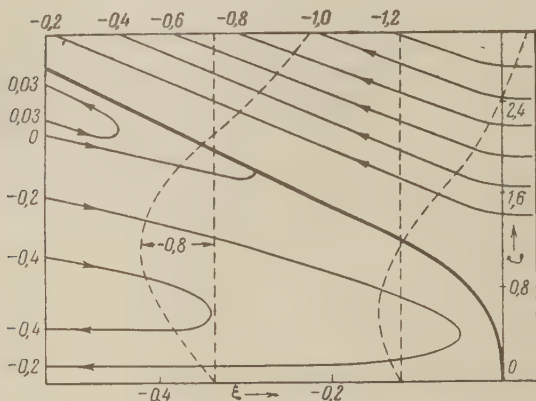


Рис. 4

соответствует результатам наблюдений в природе.

После того как уравнение (13) решено и $h(x)$ найдено (при этом рис. 1 позволяет выбрать нужную ветвь решения), расчет поля скоростей и давления в воздушных массах и в области фронта осуществляется по формулам (9), (12) и др. Результаты расчета примеров даны на рис. 3 и 4. На рис. 3 нанесен разрез через теплый фронт ($\Delta\theta = -10^\circ$; $C = 0,25$; $V = -0,5$) в системе координат, движущейся вместе с фронтом. Жирной чертой обозначена проекция фронтальной поверхности на вертикальную плоскость, перпендикулярную линии фронта, тонкой чертой — соответствующие проекции поверхностей тока. Стрелки указывают направление движения воздуха. Пунктиром нанесены распределения по высоте относительных составляющих скорости v_h/u_g , соответствующие двум значениям ξ . На рис. 4 приведен случай холодного фронта ($\Delta\theta = -10^\circ$; $C = 1,5$; $V = 1,5$).

Кабардино-Балкарское отделение
Института прикладной геофизики
Академии наук СССР

Поступило
10 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. Margules, Meteorologische Zs., Hann-Band, 243 (1906). ² А. Ф. Дюбюк, Метеорология и гидрология, № 4—5 (1937); Тр. Центр. инст. погоды, в. 26 (53) (1951); Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9 (1956). ³ F. K. Ball, Quart. J. Roy. Meteorolog. Soc., 86, № 367 (1960).

* Соответствующие выводы можно получить и для неподвижного фронта, когда $C = 0$.

** Интегральные кривые по своему характеру совпадают с кривыми, полученными Боллом (³), хотя последний использует более грубую гидравлическую постановку задачи.

А. А. АХРЕМ и А. И. КУЗНЕЦОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ТОНКОСЛОЙНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ СТЕРОИДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

(Представлено академиком Б. А. Казанским 14 I, 1961)

В последнее время начал развиваться новый микрометод адсорбционной хроматографии на пластинках или тонкослойной хроматографии. Этот метод нашел свое применение главным образом для исследования природных продуктов, а также в органическом синтезе.

Сущность метода заключается в следующем; тонкий слой адсорбента (обычно силикагеля) вместе с фиксатором (крахмал или гипс) и водой наносится на небольшую стеклянную пластинку и активируется нагреванием⁽¹⁾. На таких пластинках с помощью соответствующих растворителей можно быстро (30—90 мин.) разделять малые количества веществ (5—100γ) и проявлять их подобно хроматографии на бумаге. Быстрота этого метода, исключая влияние адсорбента на вещество, удобство и простота привлекли наше внимание, и мы использовали его для идентификации стероидных соединений.

Впервые о возможности применения тонкослойной хроматографии при исследовании стероидных соединений упоминается в работах Шталя⁽²⁾; затем он был применен⁽³⁾ для разделения слабополярных стероидов, главным образом этиановых эфиров, а также⁽⁴⁾ для идентификации и разделения некоторых эстрогенов и, наконец, ⁽⁵⁾ для разделения холестерина и его эфиров, холестеридиолов и некоторых стероидных оксикетонов.

Нами был исследован ряд стероидных соединений, являющихся промежуточными продуктами синтеза аналогов кортикостероидов. Опыты проводились на пластинках силикагель — гипс. В качестве растворителей использовалась система циклогексан — этилацетат в различных соотношениях. Как известно⁽⁶⁾, при хроматографировании на бумаге для локализации пятен стероидных соединений применяется опрыскивание концентрированной серной кислотой. Однако этот метод до сих пор не был использован для проявления хроматограмм стероидных соединений на пластинках. Применение концентрированной серной кислоты для целей проявления оказалось в этом ряду удобным. Почти во всех случаях были получены пятна, окрашенные при дневном и флуоресцирующие в ультрафиолетовом свете. Кроме того, в ряде случаев проявление производилось растворами $SbCl_3$, 2,4-динитрофенилгидразина (для сопряженных кетонов) и фосфорномолибденовой кислоты (для несопряженных кетонов). Величина R_F колебалась в пределах $\pm 0,05$. Полученные результаты сведены в табл. 1. Ниже приводятся несколько исследованных нами примеров разделения смесей стероидных соединений с помощью тонкослойной хроматографии.

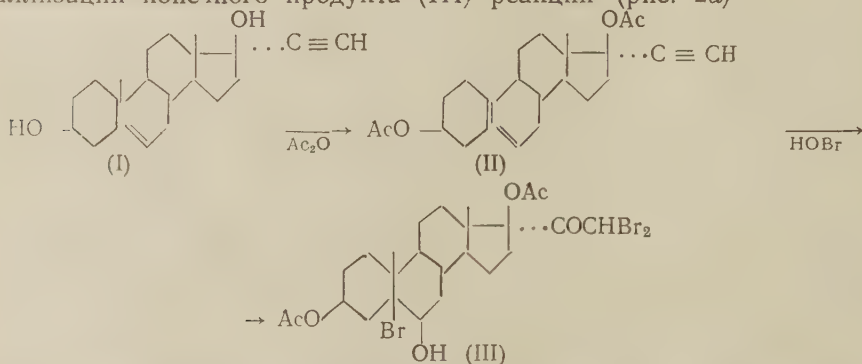
Разделение смесей эпимеров: α - и β -5,6-окиси ацетата дегидроэпиандростерона (рис. 1а) и α - и β -5,6-окиси ацетата этиниландро-стандиола (рис. 1б) на пластинке силикагель — гипс.

Тонкослойная хроматография была использована нами для выяснения состава смеси продуктов, полученной из маточного раствора при перекри-

№№ п. п.	Соединение	Циклогексан-этил-ацетат	R_F	Проявление на			
				H_2SO_4		$SbCl_5$	
				дн.	у.-ф.	дн.	у.-ф.
1	Дегидроэпиандростерон	2 : 1	$0,28 \pm 0,03$	+		+	
2	Ацетат дегидроэпиандростерона	2 : 1	$0,59 \pm 0,02$	+р		+ф	
3	17 α -этинил- Δ^5 -андростендиол-3 β , 17 β	2 : 1	$0,35 \pm 0,02$	+р	+	+	
4	3-ацетат-17 α -этинил- Δ^5 -андростендиол-3 β , 17 β	2 : 1	0,55	+р			
5	3,17-диацетат-17 α -этинил- Δ^5 -андростендиол-3 β , 17 β	2 : 1	$0,75 \pm 0,7$	+р	+	+ф	+
6	3,17-диацетат-5,21,21-три-бром-прегнантриол-3 β , 6, 17 β	2 : 1	$0,27 \pm 0,03$	+г слабо	+	—	+
7	5 α , 6 α -окись ацетата эпиандростерона	2 : 1	0,34	+3			
8	5 β , 6 β -окись ацетата эпиандростерона	1 : 1	$0,66 \pm 0,03$	нагр. +3	—		
9	3-ацетат-5 α , 6 α -окиси-17 α -этинил-андростендиол-3 β , 17 β	2 : 1	0,38	+3			
10	3-ацетат-5 β , 6 β -окиси-17 α -этинил-андростендиол-3 β , 17 β	1 : 1	$0,59 \pm 0,03$	нагр. +р	—		
11	Кортизон	1 : 1	$0,80 \pm 0,01$	+р			
12	17 α -ацетат прегнина	2 : 1	$0,69 \pm 0,01$	+р			
13	17-ацетокси-21,21-дибром- Δ^4 -прегненол-17 β -дион 3,20	2 : 3	0,78	+г	+		
14	17-ацетокси- Δ^4 -прегнендион-3,20	2 : 1	0,51	+г	+		
15	Δ^4 -андростен-3,17-дион	2 : 3	0,86	+г	+		
		2 : 1	0,39	—	—		
		2 : 3	$0,75 \pm 0,05$				
		2 : 1	0,35	—	—		
		2 : 3	$0,68 \pm 0,03$				
		2 : 1	0,34	—	—		
		2 : 3	$0,65 \pm 0,03$	—	—		

Примечание. дн. — дневной свет; у.-ф. — ультрафиолетовый свет. Окраска: р — розовая; ф — фиолетовая; г — голубая; знак + проявляется; знак — не проявляется. Соединение №№ 7, 8 и 12 проявлены также фосфорномолибденовой кислотой, а соединения №№ 12—15—2,4-динитрофенилгидразином.

сталлизации конечного продукта (III) реакции (рис. 2а)



а также для разделения искусственной смеси веществ, последовательно образующихся в трех стадиях синтеза (рис. 2б).

Из рис. 2а видно, что смесь продуктов, полученных из маточника, состоит из трибромида III (пятно голубое) и еще какого-то неизвестного продукта, возможно дибромида (пятно голубое), и не содержит исходных продуктов двух предыдущих стадий I и II (пятна розовые).

Нам не удалось проявить конц. H_2SO_4 17-ацетокси-21,21-дибром- Δ^4 -прегненол-17 β -дион-3,20, 17-ацетокси- Δ^4 -прегнендион-3,20 и Δ^4 -андростендион-3,17 (табл. 1, №№ 13—15), а также разделить смесь этих соединений в системе циклогексан — этилацетат (2 : 1) и (2 : 3). Они были проявлены раствором 2,4-динитрофенилгидразина.

Экспериментальная часть

Для получения хроматографических пластинок применялись стекла размером $11 \times 17,5 \times 0,2$ см и размолотый силикагель (195—200 меш) марки КСК, а в качестве фиксатора — медицинский гипс. 6,9 г силикагеля и 0,35 г гипса взбалтывались в 18 мл дистиллированной воды. Полученная густая однородная масса выливалась на стекло и разравнивалась по его поверхности с помощью шпателя и встряхивания. Пластинка оставлялась

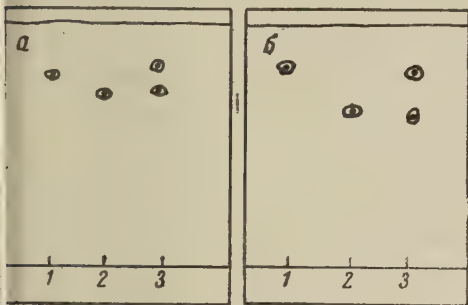


Рис. 1. а — система растворителей: циклогексан этилацетат (1:1); пробег 1 час 5 мин.; проявление конц. серной или фосфорномолибденовой кислотой. 1 — 5 α , 6 α -окись ацетата эпиандростерона, $R_F = 0,69$ (табл. 1, № 7); 2 — 5 β , 6 β -окись ацетата эпиандростерона, $R_F = 0,62$ (табл. 1, № 8); 3 — смесь α - и β -5,6-окисей ацетата эпиандростерона; α -окись $R_F = 0,73$; β -окись $R_F = 0,64$ (табл. 1, №№ 7, 8). б — система та же, проявление конц. серной кислотой. 1 — 3-ацетат-5 α , 17 β -окиси-17 α -этиниландростендиола-3 β , 17 β , $R_F = 0,82$ (табл. 1, № 9); 2 — 3-ацетат-5 β , 6 β -окиси-17 α -этиниландростендиола-3 β , 17 β , $R_F = 0,68$ (табл. 1, № 10); 3 — смесь α - и β -окисей (табл. 1, №№ 9 и 10), α -окись $R_F = 0,83$; β -окись $R_F = 0,66$

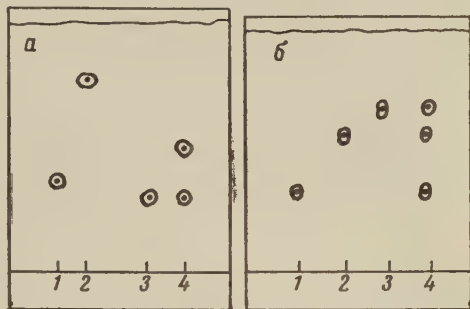


Рис. 2. а — пластинка силикагель—гипс; система растворителей циклогексан — этилацетат (2:1), пробег 1 час 20 мин.; проявление конц. серной кислотой и облучение у.-ф. светом. 1 — 17 α -этинил- Δ^5 -андростендиол-3 β , 17 β , $R_F = 0,35$ (табл. 1, № 3), пятно розовое; 2 — 3,17-диацетат-17 α -этинил- Δ^5 -андростен-3 β , 17 β , $R_F = 0,74$ (табл. 1, № 5), пятно розовое; 3 — 3,17-диацетат-5, 21, 21-три-бромпрегнантриола-3 β , 6,17 β , $R_F = 0,30$ (табл. 1, № 6), пятно голубое; 4 — смесь продуктов, полученная из маточника после перекристаллизации III, $R_F = 0,30$ (табл. 1, № 6) и $R_F = 0,45$ неизвестный продукт. Пятна голубые. б — система та же, пробег 55 мин., проявление конц. серной кислотой. 1 — 17 α -этинил- Δ^5 -андростендиол-3 β , 17 β , $R_F = 0,35$ (табл. 1, № 3); 2 — 3-ацетат-17 α -этинил- Δ^5 -андростендиола-3 β , 17 β , $R_F = 0,55$ (табл. 1, № 4); 3 — 3,17-диацетат-17 α -этинил- Δ^5 -андростендиола-3 β , 17 β , $R_F = 0,68$ (табл. 1, № 5); 4 — смесь продуктов (табл. 1, №№ 3, 4 и 5), для № 3 $R_F = 0,32$, для № 4 $R_F = 0,54$; для № 5 $R_F = 0,68$

на 20 мин. на горизонтальной поверхности, подсушивалась (20 мин.) и активировалась в сушильном шкафу при $105-110^\circ$ 1 час. Затем охлаждалась и сохранялась в эксикаторе над блaugелем (силикагель, пропитанный солями кобальта).

На расстоянии 1,5 см от нижнего края пластинки наносились острым карандашом стартовые точки, отстоящие на 1,5—2 см друг от друга. Исследуемые вещества растворялись в 0,2 мл эфира или хлороформа и около 0,07 мл раствора с помощью микропипетки наносились на пластинку (примерно 10—20 γ). Пластинка помещалась вертикально в стеклянную аккумуляторную банку ($13 \times 18 \times 23$ см) с растворителем так, чтобы она была погружена всего на 0,5 см в жидкость, и банка закрывалась шлифованной стеклянной пластинкой. Когда жидкость поднималась на 9—10 см от 30 мин. до 1,5 час.), пластинка вынималась, фронт жидкости отмечался и пластинка сушилась при комнатной температуре или в сушильном шкафу при $40-50^\circ$ и затем проявлялась.

В качестве проявителей применялось опрыскивание конц. H_2SO_4 . При этом почти во всех случаях сразу же появлялись окрашенные пятна, хотя в некоторых случаях приходилось подогревать пластинку до 80° . Для определения с сопряженной двойной связью проводилось опрыскивание раствором 2,4-динитрофенилгидразина (³), приготовленным следующим образом: 150 мг 2,4-динитрофенилгидразина растворялись в 25 мл воды и 22 мл конц. HCl , полученный раствор доливался водой до 100 мл. Для определения карбонильных соединений применялось опрыскивание 10% раствором фосфорномолибденовой кислоты в спирте и после опрыскивания через 1 мин. пластинка нагревалась при 110° до появления пятен (³).

Таким образом, показана возможность разделения некоторых стероидных соединений с помощью тонкослойной хроматографии. В качестве проявителя использована конц. H_2SO_4 . Приведены два примера разделения эфирных окисей стероидных соединений.

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского
Академии наук СССР

Поступило
30 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ J. G. Kirchner, J. M. Miller, J. G. Keller, Anal. Chem., **23**, 42 (1951); H. H. Reitsema, Anal. Chem., **26**, 960 (1954); E. Stahl, Pharmazie, **11**, 63 (1956); E. Demole, J. Chromatography, **1**, 24 (1958). ² E. Stahl, Chemiker-Zeitung, **82**, 323 (1958); Parfüm. und Kosmetik, **39**, 564 (1958); Pharmaz. Rundschau, **1**, № (1959). ³ M. Barbier, H. Jäger, H. Tobias, E. Wyss, Helv. chim. acta, **42**, 2440 (1959). ⁴ М. Барбье, С. И. Завьялов, Изв. АН СССР, ОХН, **196**, № 7, 1309. ⁵ M. J. D. Van Dam, C. J. de Klaver, J. G. de Heas, J. Chromatography, **4**, 26 (1960). ⁶ J. M. Hais, K. Macek, Handbuch der Papierchromatographie, **1**, 346 (1958).

Академик А. А. БАЛАНДИН, О. К. БОГДАНОВА и И. П. БЕЛОМЕСТНЫХ

КИНЕТИКА ДЕГИДРОГЕНИЗАЦИИ ЭТИЛБЕНЗОЛА В СТИРОЛ

По каталитическому превращению этилбензола в стирол имеется довольно большая литература, преимущественно патентная, касающаяся катализаторов и метода дегидрогенизации алкилбензолов; имеются также материалы по изучению равновесия реакции дегидрогенизации этилбензола в стирол ⁽¹⁻³⁾. В настоящей работе впервые исследовалась кинетика реакции дегидрогенизации этилбензола в стирол и выяснялось влияние строения алкильного радикала на скорость дегидрогенизации.

Опыты проводились в проточной системе в приборе, описанном ранее ⁽⁴⁾, над смешанным окисным катализатором при разбавлении парами воды. Методика проведения опытов была такая же, как при дегидрогенизации изопропилбензола ⁽⁵⁾. Опыты проводились с 10 мл катализатора. Степень разбавления этилбензола парами воды держалась постоянной и составляла 1:3 вес. ч. Катализат от опытов получался бесцветный. Содержание стирола в катализате определялось бромметрическим методом по Розенмунду ⁽⁶⁾. Кроме того, анализ катализата производился методом газо-жидкостной хроматографии. В качестве жидкой фазы применялся динонилсебагинат, нанесенный на диатомитовый кирпич в количестве 18%. Во избежание полимеризации катализата к жидкой фазе добавлялся неозон-Д в количестве 2%. Контактный газ анализировался на видоизмененном аппарате Орса на содержание углекислоты, олефиновых углеводородов, водорода и предельных углеводородов. После каждого опыта катализатор продувался паро-воздушной смесью и воздухом. Активность катализатора контролировалась проведением опытов при постоянных условиях (температура и скорости пропускания); в продолжение всех опытов она оставалась постоянной.

Исходный этилбензол имел следующие константы: т. кип. 135,5°; d_4^{20} 0,8696; n_D^{20} 1,4960; литературные данные ⁽⁷⁾: т. кип. 136,5°, d_4^{20} 0,869; n_D^{20} 1,4959. Стирол, применявшийся в опытах по определению относительных адсорбционных коэффициентов, имел т. кип. 144—145°; d_4^{20} 0,9000; n_D^{20} 1,5485; литературные данные ⁽⁷⁾: т. кип. 145—146°; d_4^{20} 0,9030; n_D^{20} 1,5484.

Кинетика дегидрогенизации этилбензола исследовалась в области температур 520—560° и скорости пропускания 800—1000 мл/л·час. Контакт-

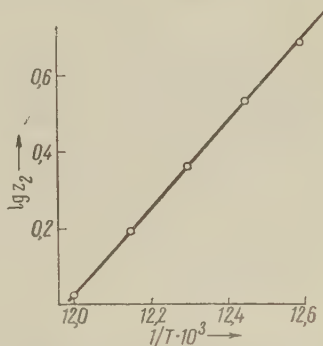


Рис. 1. Логарифмическая зависимость между $\lg z_2$ и $1/T$

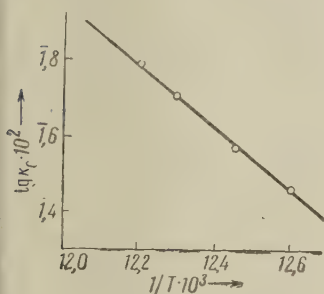


Рис. 2. Зависимость $\lg k_c$ от $1/T$

ный газ выделялся с равномерной скоростью, отсчет выделяющегося газа производился каждые 3 мин., объем приводился к нормальным условиям (н. т. д.) и выражался в миллиметрах в минуту. Как показал анализ, выделившийся газ представлял собой в основном водород с небольшим количеством CO_2 (от 2,3 до 7,4%) и непредельных углеводородов (0,2—0,6%). Предельные углеводороды в этих условиях обнаружены не были.

Скорость реакции определялась по образовавшемуся стиrolу. Между количествами образовавшихся стиrolа и водорода наблюдалось близкое соответствие.

Из экспериментальных данных были рассчитаны константы скорости реакции по уравнению мономолекулярных каталитических реакций в проточной системе, выведенному одним из нас ⁽⁸⁾. Как было показано нами ранее, это уравнение справедливо для дегидрирования углеводородов ⁽⁹⁾ и спиртов ⁽¹⁰⁾ на окисном катализаторе. В данном случае это уравнение имеет вид:

$$k = 2,303(z_2 + z_3) A_1 \cdot \lg \frac{A_1}{A_1 - m} - m(z_2 + z_3 - 1), \quad (1)$$

где k — константа скорости реакции; z_2 и z_3 — относительные адсорбционные коэффициенты продуктов реакции — стиrolа и водорода; A_1 — количество пропущенного вещества в единицу времени; m — количество образовавшегося продукта реакции.

Для определения относительных адсорбционных коэффициентов продуктов реакции — стиrolа и водорода — в аналогичных условиях были измерены скорости дегидрогенизации бинарных смесей этилбензол — стиrol и этилбензол — водород. Численные значения относительных адсорбционных коэффициентов рассчитывались по формуле:

$$z = \frac{m_0/m - 1}{100/p - 1}, \quad (2)$$

где m_0 и m — количество образовавшегося продукта реакции при пропускании чистого вещества и смеси с p -процентом реагирующего вещества с продуктом

Таблица 1

Определение относительных адсорбционных коэффициентов в смеси этилбензол — стиrol (19,5 мол. % стиrolа)

Т-ра, °C	m_0	(m)	z_2
520	5,4	2,5	4,8
530	8,0	4,3	3,4
540	11,5	7,4	2,3
550	15,0	11,0	1,5

реакции, для которого определяется z . Как видно из табл. 1, относительные адсорбционные коэффициенты стиrolа изменяются от 4,8 при 520° до 1,5 при 550°. Было найдено, что относительный адсорбционный коэффициент водорода, равный 0,7, с температурой не изменяется. Логарифмическая зависимость z_2 от обратной абсолютной температуры изображена на рис. 1. Результаты опытов по дегидрированию этилбензола сведены в табл. 2.

Константы скорости, рассчитанные из экспериментальных данных по уравнению (1), приведены в табл. 3. На рис. 2, построенном по данным табл. 3,

Таблица 2

Дегидрогенизация этилбензола. (Скорость пропускания 0,50 мл за 3 мин. (1000 мл./л. час), разбавление парами воды 1:3 вес. ч.)

Т-ра, °C	Стиrol в катализате, %	H_2 (н. т. д.) за 3 мин., мл	Степень дегидрогениз. по H_2 , %	Анализ газа, об. %		
				CO_2	C_6H_{12}	H_2
522	6,0	4,8	5,1	2,3	0,5	97,2
522	6,0					
532	8,0	6,6	7,8	2,6	0,6	96,6
542	12,0	12,0	12,7	4,0	0,6	94,3
544	12,0	12,0	12,7	4,2	0,6	95,1
553	15,5		15,8	5,0	0,4	94,6
563	23,5	23,2	25,1	7,4	0,2	92,4

показана зависимость логарифма константы скорости от обратной абсолютной температуры. Точки укладываются на прямую. Энергия активации, вычисленная из констант скорости реакции, найдена равной 36,1 ккал/моль, и предэкспоненциальный множитель $\lg k_0$ равен 7,42. Из найденных значений относительных адсорбционных коэффициентов по известным формулам были рассчитаны изменения свободной энергии (ΔF) теплосодержания (ΔH) и энтропии (ΔS) адсорбционного вытеснения (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

Константа скорости дегидрогенизации этилбензола k_c и термодинамические функции адсорбционного вытеснения этилбензола стиролом

Т-ра, °C	$k \cdot 10^2$ г/мл·мин	ΔF , кал	ΔH , ккал/моль	ΔS , кал/г·моль
520	0,292	2465	} 32,8	44,5
530	0,370	1950		43,2
540	0,5120	1344		42,0
550	0,7800	715,8		40,7
545	0,6130			

Сравнивая полученные результаты по дегидрогенизации этилбензола в стирол с данными, полученными по дегидрогенизации изопропилбензола, кинетика дегидрогенизации которого изучалась нами на том же образце катализатора⁽⁵⁾, можно видеть, что этилбензол дегидрируется с меньшей скоростью, чем изопропилбензол. Так, при 520° константа скорости дегидрогенизации этилбензола равна 0,292 ($k_c \cdot 10^2$), а изопропилбензола 0,7759 ($k_c \cdot 10^2$); при 550° константы соответственно равны 0,780 и 1,570. Таким образом, изопропилбензол с разветвленным радикалом дегидрируется с почти вдвое большей скоростью, чем этилбензол.

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского
Академии наук СССР

Поступило
18 II 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Guttman, E. F. Westrum et al., J. Am. Chem. Soc., **65**, 1246 (1943).
- ² J. C. Ghosh, S. Ramadas Guha, A. N. Roy, Petroleum (England), № 6, 127 (1947); № 8, 180 (1947); № 10, 127 (1947).
- ³ О. К. Богданова, А. П. Щеглова, А. А. Баландин, И. П. Беломестных, Журн. Нефтехимия, № 2 (1961).
- ⁴ О. К. Богданова, А. А. Баландин, А. П. Щеглова, Изв. АН СССР, ОХН, **1957**, 787.
- ⁵ О. К. Богданова, А. А. Баландин, И. П. Беломестных, ДАН, **132**, № 2 343 (1960).
- ⁶ K. W. Rosenmund, W. Kuhnen, Zs. Untersuch. d. Nahrungs u. Genußmittel, **46**, 154 (1923).
- ⁷ C. E. Egloff, Physical Constants of Hydrocarbons, **1**, N. Y., 1939.
- ⁸ А. А. Баландин, ЖОХ, **12**, 156 (1942).
- ⁹ А. П. Щеглова, А. А. Баландин, О. К. Богданова, ДАН, **129**, № 5, 1071 (1959).
- ¹⁰ О. К. Богданова, А. А. Баландин, А. П. Щеглова, Изв. АН СССР, ОХН, **1957**, № 7, 795.

Э. М. БРАЙНИНА, М. Х. МИНАЧЕВА,
член-корреспондент АН СССР Р. Х. ФРЕЙДЛИНА и академик А. Н. ЕСМЕЯНОВ

АЦИЛОКСИПРОИЗВОДНЫЕ КОБАЛЬТА, НИКЕЛЯ И МАРГАНЦА

В последние годы опубликовано большое число работ в области исследования свойств ацилоксипроизводных различных металлов. Применяемые для получения ацилоксипроизводных металлов с высшими одноосновными кислотами способы: омыление жиров окисями или гидроокисями металлов, обменная реакция щелочных мыл с солями металлов или взаимодействие карбоновых кислот с солями металлов — обычно приводят к получению смесей основных солей металлов, иногда непостоянного состава. Отдельные работы указывают на возможность получения средних солей для некоторых переходных металлов. Так, например, взаимодействием сухого CoCl_2 , жирной одноосновной кислоты и аммиака в среде абс. спирта получены диацилоксипроизводные кобальта с высшими кислотами ⁽¹⁾ и действием алко-голята натрия и жирной кислоты на сухую соль кобальта получены диацилоксипроизводные кобальта с низшими кислотами ⁽²⁾.

Есть сообщение об образовании тетраацилоксициркония ⁽³⁾ при многочасовом нагревании четыреххлористого циркония с высшими кислотами в среде бензола до полного удаления хлористого водорода. Аналогичный способ рекомендуется для получения оцилоксипроизводных марганца ⁽⁴⁾ как с одноосновными, так и с двухосновными кислотами. При нагревании безводного MnCl_2 с избытком кислоты до температуры, превышающей на 10—15° температуру плавления соответствующей кислоты, получены диацил-оксипроизводные марганца. После удаления хлористого водорода продукт, промытый от избытка кислоты, имеет удовлетворительный анализ на содержание марганца. Этот метод применим только к плавким кислотам. Вероятно, вследствие необходимости многочасового нагревания при высокой температуре для высокоплавких кислот образуются побочные продукты; описываемые соединения марганца имеют вид черных порошков.

Таблица 1

№ опыта	Исходные реагенты		Молярное соотношение реагентов	Среда	Выход, %	Состав полученного соединения
	ацетилацетонаты	жирные кислоты				
1	Тетраацетилацетонат циркония	Стеариновая	1 : 4	Бензол	~100	$(\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{O}_2)_4\text{Zr}$
2	То же	Пальмитиновая	1 : 4	Бензол	~100	$(\text{C}_{16}\text{H}_{31}\text{O}_2)_4\text{Zr}$
3	» »	Лауриновая	1 : 4	Бензол	~100	$(\text{C}_{12}\text{H}_{23}\text{O}_2)_4\text{Zr}$
4	» »	ω-Хлорундекановая	1 : 4	Бензол	~100	$(\text{C}_{11}\text{H}_{21}\text{O}_2\text{Cl})_4\text{Zr}$
5	» »	Энантовая		Энантовая кислота	~100	$(\text{C}_7\text{H}_{13}\text{O}_2)_4\text{Zr}$
6	» »	Капроновая		Капроновая кислота	~100	$(\text{C}_6\text{H}_{11}\text{O}_2)_4\text{Zr}$
7	» »	Валериановая		Валериановая кислота	~100	$(\text{C}_5\text{H}_9\text{O}_2)_4\text{Zr}$
8	Триацетилацетонат кобальта	Стеариновая	1 : 3	Ксилол	55	$(\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{O}_2)_2\text{Co}$
9	Диацетилацетонат кобальта	Стеариновая	1 : 2	Ксилол	52	$(\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{O}_2)_2\text{Co}$
10	Триацетилацетонат марганца	Стеариновая	1 : 3	Ксилол	90	$(\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{O}_2)_2\text{Mn}$
11	То же	Пальмитиновая	1 : 3	Ксилол	67	$(\text{C}_{16}\text{H}_{31}\text{O}_2)_2\text{Mn}$

№ опыта	Исходные реагенты		Мольное соотношение реагентов	Среда	Выход, %	Состав полученного соединения (I)	Состав конечного продукта * (II)	Найдено, %			Вычислено, %		
	ацетилацетонаты	кислоты						C	H	N	C	H	N
1	Диацетилацетонат кобальта	Азелаиновая	1 : 1	Бензол	64	Co (C ₉ H ₁₄ O ₄)	Тот же	43,83 43,89 47,35	5,85 5,94 6,31		44,09 47,73	5,74 5,93	
2	Триацетилацетонат марганца	Азелаиновая	1 : 2	Бензол	95	[Mn (C ₉ H ₁₄ O ₄) ₂ ·C ₄ H ₆]	Тот же	47,48 38,42	6,30 4,53		38,02	4,52	
3	Диацетилацетонат кобальта	Адипиновая	1 : 1	Тетрагидрофуран	79	[Co (C ₆ H ₈ O ₄) ₄ ·C ₄ H ₆ O]	Тот же	38,85 39,14	4,62 4,09		39,19	4,08	
4	То же	Фумаровая	1 : 2	Тетрагидрофуран	73	Co (C ₄ H ₂ O ₂) ₄ ·C ₄ H ₆ O	Тот же	39,24 31,37	3,96 2,05				
5	Триацетилацетонат марганца	Фумаровая	1 : 3	Тетрагидрофуран	49	[Mn (C ₄ H ₂ O ₂) ₆ ·C ₄ H ₆ O]	Тот же	31,34 (1)	1,97		31,43	1,98	
6	Диацетилацетонат кобальта	Терефталевая	1 : 1	Пиридин	45	Co (C ₄ H ₂ O ₂) ₄ ·C ₄ H ₆ N	Co (C ₄ H ₂ O ₂) ₄ ·C ₄ H ₆ N	63,41** 63,34	4,21 4,43	9,34 9,50	62,30	4,45	10,3
7	То же	Корициная	1 : 2	Бензол	72	Co (C ₉ H ₇ O ₂) ₂	Co (C ₉ H ₇ O ₂) ₂ ·2C ₆ H ₅ N	65,27** 65,18	4,95 4,93	5,91 5,77	65,74	4,96	5,51
8	Диацетилацетонат никеля	Корициная	1 : 2	Бензол	45	Ni (C ₉ H ₇ O ₂) ₂	Тот же	61,15 61,86	4,25 4,16		61,24	3,96	
9	Триацетилацетонат марганца	Корициная	1 : 3	Бензол	84	Mn (C ₉ H ₇ O ₂) ₂	Co (C ₉ H ₇ O ₂) ₂ ·2C ₆ H ₅ N	61,81			61,94	4,01	
10	Диацетилацетонат кобальта	Миндальная	1 : 2	Бензол	53	Co (C ₉ H ₇ O ₂) ₂	Co (C ₉ H ₇ O ₂) ₂ ·2C ₆ H ₅ N	53,78* 60,28***	3,90 5,21		53,20	3,87	
								60,60	5,07		60,12	4,62	5,37

* Конечный продукт получен после дополнительной сушки в высоком вакууме или после перекристаллизации с последующей сушкой.

** Анализ сырого продукта (I).

*** Анализ конечного продукта (II).

Для синтеза ацилоксипроизводных молибдена с ароматическими и жирными одноосновными кислотами Уилкинсон (⁵, ⁶) использовал в качестве исходного вещества гексакарбонил молибдена.

Тремя из авторов этой статьи был описан (⁷) метод синтеза ацилоксипроизводных циркония, марганца и кобальта, который основан на обменной реакции между ацетилацетонатами металлов и одноосновными жирными кислотами.

Результаты, полученные в цитируемой работе, приведены в табл. 1.

В настоящей работе изучена возможность применения предложенного метода к ацетилацетонатам кобальта, никеля и марганца на примере двухосновных жирных (предельных и непредельных), а также ароматических кислот. Из двухосновных кислот были исследованы азелаиновая, адипиновая, фумаровая и терефталевая. Из одноосновных кислот, содержащих бензольное кольцо, исследована коричная и миндальная.

Взаимодействие этих кислот проведено с диацетилацетонатами кобальта и никеля, а также с триацетилацетонатом марганца в атмосфере азота в условиях нагревания в вакууме для отгонки летучих продуктов.

Конец реакции отмечается по отрицательной пробе на ацетилацетонатные группы в образовавшихся веществах. Обычно реакция продолжается от 3 до 9 час. В большинстве случаев очистка полученных соединений была осуществлена тщательным промыванием тем же растворителем, в котором проведена реакция, и затем легкой фракцией петролейного эфира.

В некоторых случаях (см. опыты № 7, 9, 10 табл. 2) оказалось возможным провести дополнительную очистку переосаждением вещества петролейным эфиром из раствора в пиридине или тетрагидрофуране. Полученные результаты сведены в табл. 2.

Обмен ацетилацетонатных групп исследуемых соединений проходит с достаточной легкостью как с одноосновными, так и с двухосновными кислотами. В случае одноосновных кислот образуются соединения, растворимые в тетрагидрофуране или пиридине. Продукты реакции с двухосновными кислотами отличаются нерастворимостью в обычных органических растворителях. Это неплавкие вещества, чрезвычайно легко дающие прочные комплексы с пиридином, тетрагидрофураном и бензолом. Полученные ацилоксипроизводные кобальта, никеля и марганца с двухосновными кислотами представляют собой, по-видимому, полимеры состава $(-Me-OOC-R-COO-)_x$.

Дебаеграмма, полученная для азелаината кобальта, показывает, что исследуемое вещество — некристаллический полимер. Нерастворимость, неплавкость и некристалличность полимера заставляют нас предположить, что атомы кобальта в данном веществе координационно связаны с карбонильными кислородами соседних молекул.

Для получения ацилоксипроизводных двухвалентного марганца с двухосновными кислотами использован ацетилацетонат формально трехвалентного марганца аналогично тому, как это имело место для реакций триацетилацетонатов марганца и кобальта с одноосновными кислотами (см. опыты № 8, 10, 11 табл. 1).

Предложенный метод обменной реакции между ацетилацетонатами циркония, марганца, никеля и кобальта и карбоновыми кислотами является общим для получения ацилоксипроизводных переходных металлов.

Институт элементоорганических соединений
Академии наук СССР

Поступило
16 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Duru, C. Moreau, C. R., **242**, 2242 (1956). ² P. Duru, C. Moreau, C. R., **243**, 1635 (1956). ³ R. N. Kapoor, R. C. Mehrotra, J. Chem. Soc., **1959**, 422. ⁴ S. Prasad, V. R. Reddy, J. Indian. Chem. Soc., **35**, 907 (1958). ⁵ E. W. Abel, A. Lingh, G. Wilkinson, J. Chem. Soc., **1950**, 3097. ⁶ E. Vanpister, G. Wilkinson, Chem. and Ind., **1960**, 319. ⁷ P. X. Фрейдлина, Э. М. Брайнина, А. Н. Несмеянов, Изв. АН СССР, ОХН, **1961**, № 4, 608.

А. М. ГОЛУБ и В. В. СКОПЕНКО

СЕЛЕНОЦИАНАТНЫЕ КОМПЛЕКСЫ СЕРЕБРА КАТИОННОГО ТИПА

(Представлено академиком И. В. Тананаевым 3 II 1961)

Галогениды и псевдогалогениды серебра имеют повышенную растворимость в присутствии избытка не только соответствующих анионов, но и катионов серебра. На возможность образования катионных комплексов типа Me_2X^+ , где X — анион, указывал В. А. Кистяковский ⁽¹⁾, который обнаружил в растворе комплексы Ag_3J^{2+} ⁽²⁾. К такому же выводу пришел и К. Геллвиг, наблюдая перемещение йода к катоду при электролизе жидкой фазы

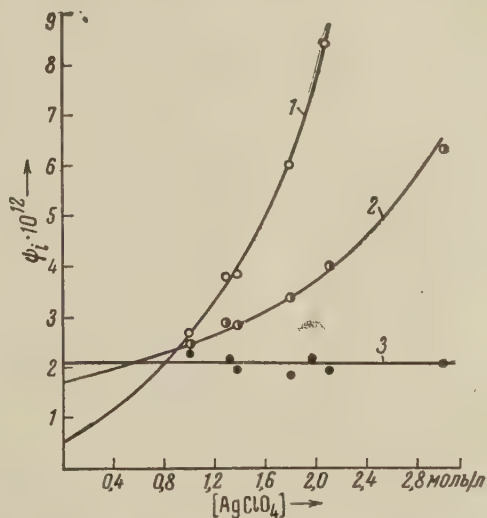
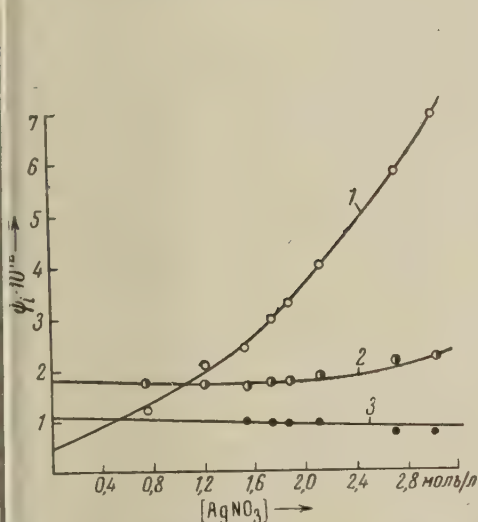
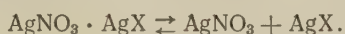


Рис. 1. Зависимость ψ_i от концентрации $AgNO_3$. 1 — ψ_2 ; 2 — ψ_3 ; 3 — ψ_4

Рис. 2. Зависимость ψ_i от концентрации $AgClO_4$. 1 — ψ_2 ; 2 — ψ_3 ; 3 — ψ_4

системы $AgNO_3 - AgJ - H_2O$ ⁽³⁾. К. Геллвиг изучил растворимость некоторых солей серебра в растворе $AgNO_3$ и выделил в кристаллическом виде соединения состава: $2AgNO_3 \cdot AgX$ и $AgNO_3 \cdot AgJ$, где $X = J', CNS', Y = Cl' Br', J'$.

Относя такие соединения к двойным солям, С. В. Горбачев ⁽⁴⁾ рассчитал их константы диссоциации в соответствии со схемой:



И. А. Каблуков ⁽⁵⁾ посредством термического анализа системы $AgBr - AgNO_3$ установил существование соединения $AgNO_3 \cdot AgBr$. В расплаве ⁽⁶⁾ доказаны также соединения $2AgNO_3 \cdot AgJ$; $AgNO_3 \cdot AgJ$ и $AgNO_3 \cdot AgCl$.

К. Лизер ⁽⁷⁾, измеряя понижение температуры замерзания и электропроводность водных растворов $AgNO_3$, в которых был растворен AgJ , подтвердил существование катионных комплексов. Б. В. Некрасов также рас-

смаатривает соединения типа $\text{Ag}_n\text{Hal}(\text{NO}_3)_{n-1}$ как комплексные с галоген-ионом в качестве центрального иона (8). Используя данные Геллвига по растворимости галогенидов серебра, К. Б. Яцимирский (9) рассчитал общие константы диссоциации катионных комплексов Ag_3J^{2+} ($8,0 \cdot 10^{-15}$), Ag_2Br^+ ($2 \cdot 10^{-10}$) и Ag_2Cl^+ ($2 \cdot 10^{-7}$).

Так как CNSe^- -ион имеет заметное сходство с J^- -ионом, можно было предположить о существовании катионных комплексов и на основе селеноцианата серебра. Представляло интерес сопоставить прочности селеноцианатных комплексов с галогенидными, а также выяснить вопрос о том, влияет ли внесферный ион на протекание реакции комплексообразования. С этой целью мы изучили растворимость AgCNSe в водных растворах AgNO_3 и AgClO_4 .

Результаты исследования и их обсуждение

Селеноцианат серебра получали обменной реакцией между AgNO_3 марки ч. д. а. и KCNSe (99%). Перхлорат серебра получен из нитрата серебра. Последний переводился в окись, которая затем растворялась в HClO_4 марки х. ч. Полученный AgClO_4 перед использованием перекристаллизовывался.

Готовилась серия растворов AgNO_3 и AgClO_4 , которые насыщались свежеприготовленным AgCNSe . Смеси термостатировались при 20° до достижения равновесия, после чего твердая фаза, представляющая собой AgCNSe , отфильтровывалась. В фильтрате определяли серебро и селен. Для этого аликвотную часть раствора обрабатывали азотной кислотой, определяли общее серебро в виде AgCl (весовым методом), а селен определяли аргентометрически (10). Опыты по изучению растворимости AgCNSe в растворах AgNO_3 и AgClO_4 повторялись 2—3 раза. Построение логарифмической зависимости растворимости AgCNSe от концентрации соли серебра показало, что в интервале концентрации их 0,7 — 3,1 моль/л образуются комплексы Ag_2CNSe^+ , $\text{Ag}_3\text{CNSe}^{2+}$ и даже $\text{Ag}_4\text{CNSe}^{3+}$. О существовании последнего ком-

Таблица 1
Растворимость AgCNSe в растворах AgNO_3

Исходная концентр. AgNO_3 , моль/л	Растворим. AgCNSe , моль/л	Равновесн. концентр. AgNO_3	Φ	$\Phi_2 = \frac{\Phi}{[\text{Ag}^+]^2}$	$\Phi_3 = \frac{\Phi}{[\text{Ag}^+]^3}$	$\Phi_4 = \frac{\Phi}{[\text{Ag}^+]^4}$
0,736	$0,375 \cdot 10^{-3}$	0,736	$0,069 \cdot 10^{13}$	$1,27 \cdot 10^{12}$	$1,73 \cdot 10^{12}$	$2,35 \cdot 10^{12}$
1,192	$1,00 \cdot 10^{-3}$	1,191	$0,298 \cdot 10^{13}$	$2,10 \cdot 10^{12}$	$1,77 \cdot 10^{12}$	$1,48 \cdot 10^{12}$
1,521	$1,49 \cdot 10^{-3}$	1,520	$0,566 \cdot 10^{13}$	$2,45 \cdot 10^{12}$	$1,68 \cdot 10^{12}$	$1,12 \cdot 10^{12}$
1,728	$2,12 \cdot 10^{-3}$	1,726	$0,914 \cdot 10^{13}$	$3,08 \cdot 10^{12}$	$1,78 \cdot 10^{12}$	$1,03 \cdot 10^{12}$
1,860	$2,50 \cdot 10^{-3}$	1,858	$1,16 \cdot 10^{13}$	$3,36 \cdot 10^{12}$	$1,80 \cdot 10^{12}$	$0,98 \cdot 10^{12}$
2,097	$3,45 \cdot 10^{-3}$	2,094	$1,81 \cdot 10^{13}$	$4,11 \cdot 10^{12}$	$1,96 \cdot 10^{12}$	$0,95 \cdot 10^{12}$
2,687	$6,36 \cdot 10^{-3}$	2,681	$4,26 \cdot 10^{13}$	$5,93 \cdot 10^{12}$	$2,20 \cdot 10^{12}$	$0,83 \cdot 10^{12}$
3,022	$8,48 \cdot 10^{-3}$	3,014	$6,39 \cdot 10^{13}$	$7,03 \cdot 10^{12}$	$2,33 \cdot 10^{12}$	$0,78 \cdot 10^{12}$

Таблица 2
Растворимость AgCNSe в растворах AgClO_4

Исходная концентр. AgClO_4 , моль/л	Растворим. AgCNSe , моль/л	Равновесн. концентр. AgClO_4	Φ	Φ_2	Φ_3	Φ_4
1,045	$1,10 \cdot 10^{-3}$	1,044	$0,287 \cdot 10^{13}$	$2,63 \cdot 10^{12}$	$2,52 \cdot 10^{12}$	$2,42 \cdot 10^{12}$
1,305	$1,98 \cdot 10^{-3}$	1,303	$0,645 \cdot 10^{13}$	$3,80 \cdot 10^{12}$	$2,92 \cdot 10^{12}$	$2,24 \cdot 10^{12}$
1,381	$2,12 \cdot 10^{-3}$	1,379	$0,731 \cdot 10^{13}$	$3,85 \cdot 10^{12}$	$2,79 \cdot 10^{12}$	$2,02 \cdot 10^{12}$
1,796	$4,35 \cdot 10^{-3}$	1,792	$1,949 \cdot 10^{13}$	$6,07 \cdot 10^{12}$	$3,39 \cdot 10^{12}$	$1,89 \cdot 10^{12}$
1,943	$6,61 \cdot 10^{-3}$	1,937	$3,20 \cdot 10^{13}$	$8,53 \cdot 10^{12}$	$4,40 \cdot 10^{12}$	$2,27 \cdot 10^{12}$
2,093	$7,01 \cdot 10^{-3}$	2,086	$3,66 \cdot 10^{13}$	$8,40 \cdot 10^{12}$	$4,03 \cdot 10^{12}$	$1,93 \cdot 10^{12}$
3,008	$2,24 \cdot 10^{-2}$	2,986	$1,67 \cdot 10^{14}$	$1,88 \cdot 10^{13}$	$6,37 \cdot 10^{12}$	$2,10 \cdot 10^{12}$

плекса ранее высказывались лишь предположительно (3). Данные о составе этих комплексов были подтверждены при расчете их констант диссоциации по Ледену (11). Результаты исследования представлены в табл. 1—2 и на рис. 1—2.

Функция Φ вычислялась приближенно как $\frac{S [Ag^+]}{Pr}$ (12), где $[Ag^+]$ — равновесная концентрация ионов серебра, S — растворимость $AgCNSe$. Значение произведения растворимости (Pr) $AgCNSe$ принято равным $4 \cdot 10^{-16}$ (13).

Как видно из рис. 1, 2, при экстраполяции значений ϕ_i на нулевую концентрацию ионов серебра находили β_i (отрезки на ординате), а далее рассчитывали и константы диссоциации соответствующих комплексов как $\frac{1}{\beta_i}$.

Полученные при этом значения приведены в табл. 3.

Из приведенных выше данных видно, что в водных растворах в присутствии нитрата и перхлората серебра существуют комплексы одинакового состава. Следует отметить, что образование Ag_4CNSe^{3+} в присутствии нитрата серебра по сравнению с растворами $AgClO_4$ более затруднено (см. рис. 1). В обоих растворах наблюдается хорошее совпадение констант диссоциации простейших комплексов. Для комплекса Ag_4CNSe^{3+} константы диссоциации несколько расходятся (см. табл. 3). Имеет расхождение и растворимость селеноцианата серебра в присутствии $AgClO_4$ и $AgNO_3$.

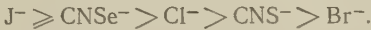
Т а б л и ц а 3

Значения констант диссоциации комплексов

	Нитратные растворы	Перхлоратные растворы
$K_2 = \frac{[Ag^+]^2 [CNSe^-]}{[Ag_2CNSe^+]}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$
$K_3 = \frac{[Ag^+]^3 [CNSe^-]}{[Ag_3CNSe^{2+}]}$	$5,6 \cdot 10^{-13}$	$5,9 \cdot 10^{-13}$
$K_4 = \frac{[Ag^+]^4 [CNSe^-]}{[Ag_4CNSe^{3+}]}$	$9,1 \cdot 10^{-13}$	$4,8 \cdot 10^{-13}$

По прочности катионные комплексы серебра на основе селеноцианат-иона весьма близки к соответствующим комплексам йода. Так, константа диссоциации Ag_3I^{2+} равна $8,0 \cdot 10^{-15}$ (9), константа диссоциации Ag_3CNSe^{2+} равна $5,6 \cdot 10^{-13}$ (в присутствии $AgNO_3$).

Чтобы проследить различие в образовании катионных комплексов на основе галогенидов и псевдогалогенидов, сопоставим растворимости соответствующих солей в растворах нитрата серебра с концентрацией 3 моль/л. При этом имеем следующие значения: $AgCNSe$ $8,4 \cdot 10^{-3}$; AgJ $9,4 \cdot 10^{-3}$ (3); $AgCNS$ $2,6 \cdot 10^{-3}$ (3) моль/л. Растворимость AgJ и $AgCNS$ определялась при 25° (3). Таким образом, $CNSe$ -ион по способности образовывать комплексы с серебром стоит ближе к J^- -иону, чем к CNS^- , Cl^- , Br^- . По растворимости солей AgX в 3M растворе $AgNO_3$ галоген- и псевдогалоген-ионы можно разместить в ряд



Мы попытались также выделить соли, содержащие в своем составе катионные комплексы. Для этого готовились водные растворы $AgNO_3$ и $AgClO_4$ (примерно 3 моль/л). Раствор нагревался до 60—70°, затем вносился свежеприготовленный $AgCNSe$ до насыщения. Избыток $AgCNSe$ быстро отделяли, фильтрат ставили на кристаллизацию. Из нитратного раствора получены белые, слегка коричневатые, очень мелкие кристаллы, устойчивые на воздухе. Водой они разлагаются с выделением $AgCNSe$, растворимы без разложения в растворах $AgNO_3$, при нагревании до 118—120° разлагаются.

Для нахождения состава полученной соли навеску обрабатывали горячей водой, выделившийся при этом $AgCNSe$ фильтровали, промывали водой, спиртом, сушили при 100°. В фильтрате титрованием 0,01 N $NaCl$ находили серебро.

Найдено %: $AgNO_3$ 61,2; 61,3; 61,0; $AgCNSe$ 37,6; 38,7; 39,1
 (Ag_3CNSe) (NO_3)₂. Вычислено %: $AgNO_3$ 61,5; $AgCNSe$ 38,5

Из раствора AgClO_4 при насыщении его AgCNSe выделены белые игольчатые кристаллы, устойчивые на воздухе и не разлагающиеся при нагревании до 150° . При более высокой температуре соль, полученная из растворов AgClO_4 , разлагается со взрывом. Она разлагается также при растворении в воде. Состав соли отвечает формуле $(\text{Ag}_2\text{CNSe})\text{ClO}_4$.

Найдено %: AgClO_4 49,20; 49,23; AgCNSe 49,90; 49,70
($\text{Ag}_2\text{CNSe})\text{ClO}_4$. Вычислено %: AgClO_4 49,23; AgCNSe 50,77

Таким образом, синтез молекулярных соединений, как и данные растворимости, дает возможность сделать вывод о влиянии внесферных ионов на взаимодействие между CNSe^- и Ag^+ -ионами.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
9 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. А. Кистяковский, *Zs. phys. Chem.*, **6**, 97 (1890). ² В. А. Кистяковский, *ЖРФХО*, **33**, 480 (1901). ³ К. Hellwig, *Zs. anorg. Chem.*, **25**, 157 (1900). ⁴ С. В. Горбачев, *ЖОХ*, **4**, в. 10, 1327 (1934). ⁵ И. А. Каблук, *Zs. phys. Chem.*, **65**, 121 (1909). ⁶ Справочник техн. энциклопедии, **7**, М., 1931. ⁷ К. Н. Lieser, *Zs. anorg. u. allgem. Chem.*, **292**, 114 (1957). ⁸ Б. В. Некрасов, *Курс общей химии*, М., 1954, стр. 817. ⁹ К. Б. Яцимирский, *ДАН*, **77**, 819 (1951). ¹⁰ Н. Hahn, V. Viohl, *Zs. anal. Chem.*, **149**, 50 (1956). ¹¹ J. Leden, *Zs. phys. Chem.*, **A 188**, 160 (1941). ¹² G. S. Cave, D. N. Hume, *J. Am. Chem. Soc.*, **75**, 2893 (1953). ¹³ Справочник химика, **3**, М., 1952.

Е. А. ИПОЛИТОВА и Л. М. КОВБА

О СОСТАВЕ И СВОЙСТВАХ УРАНАТОВ

(Представлено академиком В. И. Спицыным 26 XII 1960)

Проведенные ⁽¹⁾ исследования структур уранатов позволяют рассмотреть вопрос о влиянии природы катиона на их состав и свойства. Результаты исследования реакций трехокиси и закиси — окиси урана с карбонатами щелочных и окислами или карбонатами некоторых двухвалентных элементов были опубликованы ранее ^(2, 3). Нами изучены также реакции закиси — окиси урана с другими солями этих элементов и окисью свинца.

При взаимодействии окислов урана с нитратами, хлоридами и сульфатами натрия и калия, так же как и с карбонатами, вначале образуются диуранаты (или иногда три-гексауранаты). В случае хлоридов кроме уранатов получают хлоруранаты и уранилхлорид, с сульфатами — уранилсульфат. Дальнейшая реакция между диуранатом и избытком щелочной соли наблюдается только в случае нитратов (образование Na_2UO_4). Добавление даже большого избытка хлорида или сульфата не приводит к образованию моноураната. Алкалирующее действие исследованных солей уменьшается в ряду: карбонат — нитрат — хлорид — сульфат. При избытке окислов урана могут образовываться полиуранаты (вплоть до триураната лития и гексауранатов калия, рубидия и цезия). Строение триураната лития и три-гексауранатов калия различно. Особенностью структуры три-гексаураната калия, устойчивой только при больших размерах катиона, по-видимому, объясняется отсутствие аналогичных фаз у натрия и лития.

В отличие от щелочных элементов, образование уранатов при взаимодействии U_3O_8 с хлоридами кальция, кадмия и стронция начинается с моноуранатов кальция, кадмия (α -форма) и структурно близкого к ним $\text{SrUO}_{3,4}$, окисляющегося затем до SrUO_4 (β -форма). На этом взаимодействие между U_3O_8 и избытком хлорида заканчивается, а окислы и карбонаты реагируют с моноуранатами, давая ортоуранаты $\text{Me}_3^{II}\text{UO}_6$ (Ca, Sr, Ba, Cd) и $\text{Me}_2^{II}\text{UO}_5$ (Ca, Sr, Ba, Pb). Моноуранаты стронция и свинца способны растворять трехокись урана (при температурах 1100 и 600° соответственно), образуя фазы, рентгенограммы которых почти не отличаются от рентгенограмм моноуранатов. В случае соединения свинца повышение температуры до 800° приводит к постепенному распаду образующейся фазы с выделением моноураната. У стронция отжиг твердых растворов UO_3 в β - SrUO_4 сопровождается перестройкой структуры и образованием фазы $\text{SrO} \cdot 1,5\text{—}1,75 \text{UO}_3$.

Таким образом, первоначальными продуктами реакции закиси — окиси или трехокиси урана с окислами и солями обычно являются уранаты с гексагональной симметрией, так как взаимное расположение атомов урана в них близко к имеющемуся в исходных окислах урана. Этим, в частности, объясняется образование гексагональных триуранатов магния и цинка при взаимодействии закиси — окиси урана с соответствующими окислами.

Уранаты щелочных элементов в зависимости от состава претерпевают термический распад либо с потерей щелочного окисла, либо с выделением закиси — окиси урана. В ряду Li_2UO_4 — Cs_2UO_4 устойчивость падает в соответствии с повышением летучести Me_2O . Меньшая термическая устой-

чивость моноуранатов рубидия и цезия объясняет отсутствие у них полиморфизма: распад происходит раньше полиморфного превращения. Три гексауранаты, характеризующиеся большими расстояниями между уранил кислородными слоями, менее устойчивы (за исключением тетраураната рубидия). Из окислов щелочных элементов только окись лития в определенных условиях способна давать с окислами урана твердые растворы состава $(\text{Li}, \text{U})\text{O}_{2\pm x}$. Распад ураната лития в вакууме идет по схеме $\text{Li}_2\text{UO}_4 \rightarrow \text{LiUO}_3 \rightarrow (\text{Li}, \text{U})\text{O}_{2\pm x}$ (с потерей окиси лития). Напротив, в случае двухвалентных элементов распад уранатов обычно сопровождается образованием твердых растворов $(\text{Me}^{\text{II}}, \text{U})\text{O}_{2\pm x}$ со структурой флюорита (если летучесть $\text{Me}^{\text{II}}\text{O}$ не слишком велика).

Следовательно, термическая устойчивость уранатов и тип их термического распада определяются, с одной стороны, летучестью основного окисла (или его термической устойчивостью), а с другой стороны, минимальным количеством этого окисла, требующимся для стабилизации шестивалентного состояния урана. На процесс распада существенное влияние оказывает также способность основных окислов давать с окислами урана твердые растворы.

Состав продуктов восстановления уранатов водородом зависит от устойчивости соответствующих соединений урана низшей валентности (V и IV) и данного элемента. Как было нами установлено, моноуранаты лития и цезия уже при низкой температуре (350—400°) восстанавливаются водородом до окислов урана UO_{2+x} (реакции практически необратимы). Для восстановления водородом диуранатов натрия и калия, моноуранатов калия и рубидия необходима более высокая температура (400—550°), причем восстановление диуранатов сначала идет без разрушения структуры ураната (фазы $\text{Me}_2\text{U}_1\text{O}_{7-x}$). На следующей стадии восстановления образуются уранаты (V) натрия и калия состава $\text{Me}^{\text{I}}\text{UO}_3$ (структура перовскита). Продукт восстановления моноураната рубидия имеет состав Rb_xUO_3 ($x \sim 0,85$). Соответствующий уранат (V) лития образуется только при термическом распаде Li_2UO_4 в вакууме. Дальнейшее повышение температуры восстановления приводит к образованию двуокиси урана. При восстановлении более кислых уранатов (например, $\text{K}_2\text{U}_3\text{O}_{10}$) сначала получается уранат (V) и UO_{2+x} . Уранаты (V) более устойчивы в присутствии свободной гидроокиси щелочного элемента. Уранаты (V) легко растворяются в кислотах-окислителях, медленнее — в разбавленных соляной и серной кислотах. При прокаливании на воздухе они окисляются, давая соответствующие уранаты. В отличие от «вольфрамовых бронз», уранаты (V) характеризуются узкой областью гомогенности и большей химической активностью.

Восстановление уранатов щелочноземельных металлов начинается при более высокой температуре (>600°) и сопровождается образованием фаз $\text{Me}^{\text{II}}\text{UO}_{4-x}$ без изменения (Ca, Ba) или с изменением (Sr) структуры исходного ураната. Окислением SrUO_{4-x} ниже 700° может быть получена метастабильная α -модификация SrUO_4 . Дальнейшее повышение температуры восстановления приводит к образованию кубических фаз со структурой флюорита.

Восстановление уранатов цинка и кадмия сопровождается выделением окислов урана и металлических цинка и кадмия.

При потенциометрическом титровании солей уранила щелочами, независимо от характера используемой гидроокиси, точки перегиба на кривых наблюдались при добавлении 1; 1,5; 2; 2,28; 2,5 и 3 молей $\text{Me}^{\text{I}}\text{OH}$ на 1 моль уранилнитрата, что соответствует образованию следующих соединений $\text{UO}_2(\text{OH})\text{NO}_3$ (pH 2,5—3,5), $(\text{UO}_2)_2(\text{OH})_3\text{NO}_3$ (pH 3,5—5,0), $\text{UO}_2(\text{OH})_2$ (pH 4,0—5,5), $\text{Me}_2\text{U}_7\text{O}_{22}$ (pH 6,0—6,5), $\text{Me}_2\text{U}_4\text{O}_{13}$ (pH 7,0—9,0) и $\text{Me}_2\text{U}_2\text{O}_7$ (pH 9,0—11,0).

В результате химического и рентгенографического анализа осажденных уранатов натрия, полученных при различных pH (адсорбированная щелочь отмывалась спиртом), было установлено существование двух фаз

$\text{Na}_2\text{O} \cdot 2 - 4\text{UO}_3$ со структурой CaUO_4 и $\text{Na}_2\text{O} \cdot 4 - 7\text{UO}_3$ со структурой три-гексаураната калия. Рентгенографическое исследование суспензий осажденных уранатов натрия и калия в 10% растворах соответствующих гидроокисей показало, что моноуранаты щелочных элементов в водной среде не образуются.

Осадки, полученные в одинаковых условиях действием избытка соответствующей гидроокиси на раствор соли уранила, после отмывания водой до полного удаления ионов гидроксила имели следующий приближенный состав: $\text{Li}_2\text{O} \cdot 2,5\text{UO}_3$; $\text{Na}_2\text{O} \cdot 2,5\text{UO}_3$; $\text{K}_2\text{O} \cdot 3\text{UO}_3$; $\text{Rb}_2\text{O} \cdot 4\text{U}_3\text{O}_8$; $\text{Cs}_2\text{O} \cdot 4 - 6\text{UO}_3$. При промывании осажденного ураната лития горячей водой может произойти почти полное гидролитическое разложение препарата. Аналогичные по составу продукты получались также в результате гидролиза соответствующих безводных моноуранатов (кипячение навески ураната с водой в колбе с обратным холодильником в течение нескольких часов). Таким образом, в случае ураната натрия гидролиз останавливается на образовании соединений, входящих в состав первой гомогенной фазы.

При титровании раствора уранилнитрата гидроокисями кальция, стронция и бария точки перегиба на кривых титрования были отмечены при добавлении 0,75; 1; 1,16; 1,25; 1,33; 1,5 и 2 молей гидроокиси на 1 моль уранилнитрата, что соответствует образованию $(\text{UO}_2)_2(\text{OH})_3\text{NO}_3$, $\text{UO}_2(\text{OH})_2$, $\text{MeU}_6\text{O}_{19}$, $\text{MeU}_4\text{O}_{13}$, $\text{MeU}_3\text{O}_{10}$, MeU_2O_7 и MeUO_4 . Добавление 0,5 моля гидроокиси вызывало усиление окраски раствора (образование $\text{UO}_2(\text{OH})\text{NO}_3$). В результате исследования состава осажденных уранатов кальция, полученных при отмеченных соотношениях реагентов (выдерживание две недели, промывание небольшими количествами ледяной воды), было установлено образование несколько гидролизированных моноураната ($\text{pH} > 11$) и диураната ($\text{pH} 11 - 10$) кальция с увеличенными параметрами a и c вследствие вхождения в решетку ОН-ионов и молекул воды. При $\text{pH} 9,5 - 6,5$ образовались уранаты с отношением $\text{Ca} : \text{U} = 4 - 7$. Продукты их прокаливания (500°) представляют собой одну фазу со структурой, близкой к U_3O_8 , но не идентичной ей (твердый раствор на основе U_3O_8).

Обезвоживание осажденных уранатов протекает в интервале $150 - 250^\circ$ и при близком строении водного и безводного уранатов сопровождается изменением параметров решетки (диуранаты натрия и калия, триуранат калия, моно- и диуранат кальция). Нагревание осажденных уранатов натрия (с $\text{Na}_2\text{O} : \text{UO}_3 \approx 1 : 4$) сопровождается образованием (750°) метастабильной фазы, близкой по своей структуре к диуранату (с $a = 3,91$ и $c = 17,12$), но с заметно меньшим объемом (наличие большого числа дефектов в структуре). При дальнейшем нагревании она распадается на диуранат и закись-окись урана.

Безводные уранаты гидратируются (на холоду и при кипячении) только в том случае, когда одновременно идет их гидролиз. Иначе они не присоединяют воду. Так, например, 6-часовое кипячение безводного тетраураната калия не сопровождалось его гидратацией и вся вода легко отмывалась спиртом.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. А. Ипполитова, Л. М. Ковба, ДАН, 138, № 2 (1961). ² К. М. Ефремова, Е. А. Ипполитова, Ю. П. Симанов, Викт. И. Спицын, ДАН, 124, 1057 (1959). ³ Е. А. Ипполитова, Ю. П. Симанов, Л. М. Ковба, Г. П. Полунина, И. А. Березникова, Радиохимия, 1, 660 (1959).

Л. Г. ГАНИЧЕНКО и В. Ф. КИСЕЛЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ДВУОКИСИ ТИТАНА

(Представлено академиком М. М. Дубининым 11 I 1961)

В многочисленных исследованиях адсорбции на двуокиси титана вопросы природы поверхности не подвергались специальному изучению. Авторы ^(1,2) считают, что центрами адсорбции на поверхности TiO_2 являются ионы решетки, и исходя из этого рассчитывают энергию вандерваальсового взаимодействия адсорбированной молекулы с ионами, которую они сопоставляют с экспериментально определенной теплотой адсорбции. Рассматривая реак-

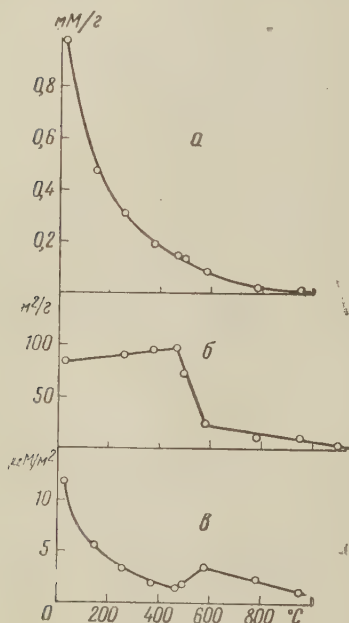


Рис. 1. Зависимость содержания структурной воды в TiO_2 , рассчитанной на единицу массы (а), на единицу поверхности (б) и удельной поверхности (в), от температуры обработки образца

ции дегидратации и дегидрогенизации в присутствии TiO_2 как катализатора, авторы ⁽³⁾ также считают, что активными центрами являются ионы О и Ti поверхности. С другой стороны, исследования ⁽⁴⁾ необратимой адсорбции паров воды на двуокиси титана указывают, что помимо физической адсорбции воды на поверхности возможны процессы гидратации. О присутствии в двуокиси титана небольшого количества воды, не удаляемой до высоких температур, говорят данные ⁽⁵⁾ по потере в весе при прокаливании. Однако природа этой воды в ⁽⁵⁾ не была вскрыта. Гидратация поверхности может значительно изменить характер адсорбционных взаимодействий по сравнению с рассматриваемым в ^(1,2) случае чисто электростатических и дисперсионных взаимодействий. Во всех указанных работах ⁽¹⁻⁴⁾ количественные определения степени гидратации поверхности не проводились.

В настоящей работе мы поставили себе целью исследовать степень гидратации поверхности двуокиси титана, подвергнутой различной температурной обработке. Кроме того, были проведены измерения адсорбции паров воды. Последняя, как было показано в ⁽⁶⁾, является чувствительным индикатором состояния поверхности. Немногочисленные исследования ⁽⁷⁻⁹⁾ удельной адсорбции паров воды на двуокиси титана не сопровождалась

анализом поверхности образца, на котором проводились измерения адсорбции. В качестве объекта исследования была взята низкотемпературная модификация двуокиси титана — анатаз, полученный сжиганием TiCl_4 . Для получения максимальной гидратации поверхности образец предварительно выдерживался длительное время в насыщенных парах воды. Измерения адсорбции паров воды и азота проводились на объемной адсорбционной установке. Величины удельных поверхностей определялись по БЭТ из низкотемпературной адсорбции азота. Для определения структурной воды вода, выделяющаяся при прокаливании образца, вымораживалась, определялось давление невымерзших газов и затем суммарное давление газа и размороженной воды на объемной установке. Результаты см. на рис. 1 и 2.

Как видно из рис. 1 в, содержание структурной воды на единице поверхности двуокиси титана, откаченного при комнатной температуре, очень велико. По величине гидратации поверхность TiO_2 приближается к поверхности кварца (кв-5, степень гидратации $11,5 \mu\text{M}/\text{м}^2$ ⁽¹⁰⁾), обработанного в тех же условиях. В интервале температур прокаливания $25-400^\circ$ содержание структурной воды, отнесенное к единице массы адсорбента (рис. 1 а) и к единице поверхности (рис. 1 в) резко падает. Двуокись титана в этом температурном интервале теряет втрое больше воды, чем кварц (кв-5). Удельная поверхность с ростом температуры до 460° несколько возрастает (рис. 1 б). Одной из причин этого, возможно, является освобождение части поверхности, благодаря удалению поверхностного гидрата из дефектов поверхности и дислокаций. Небольшое возрастание удельной поверхности при этих температурах наблюдалось на пленках из двуокиси титана ⁽¹¹⁾. Адсорбция паров воды на образце, откаченном при 25° , обратима (рис. 2). Следует отметить, что воспроизводимость исходного состояния поверхности двуокисититана значительно хуже, чем для образцов кремнезема ⁽⁶⁾, она существенно зависит от длительности откачки образца. По-видимому, это также связано с непрочностью поверхностного гидрата TiO_2 . Как видно из рис. 2, обратимая изотерма на двуокиси титана очень близка к соответствующей изотерме на кварце, обладающем почти такой же гидратацией поверхности ⁽¹⁰⁾. При высоком содержании воды на поверхности различия в адсорбционной способности окислов титана и кремния сглаживаются. Адсорбция паров воды на таких поверхностях в основном обусловлена обра-

зованием водородных связей между адсорбированными молекулами воды и структурной водой на поверхности. Предположение, что центрами адсорбции воды на поверхности TiO_2 являются гидроксильные группы, высказывалось рядом авторов ^(4, 11, 12), однако никаких экспериментальных подтверждений их существования и оценки их количества не приводилось. В последнее время ⁽¹³⁾ были обнаружены полосы валентных колебаний ОН-групп и деформационных колебаний воды в и.-к. спектре поглощения, измеренном на пленках из TiO_2 , прогретых в интервале температур $25-190^\circ$.

С увеличением температуры обработки образцов от 25 до 260° удельные величины первичной адсорбции в начальной части изотермы возрастают (рис. 2). Ранее при исследовании адсорбции паров воды на пленках двуокиси титана авторы ⁽¹¹⁾ также отмечали рост адсорбционной активности с увеличением температуры обработки образца. Из рис. 2 видно, что изотерма на прокаленном при 260° образце TiO_2 почти втрое выше соответствующей изотермы на силикагеле К-2, обладающем практически такой же величиной степени гидратации ⁽⁶⁾. После выдерживания образцов в течение 2 суток в насыщенных парах воды, как и в работе ⁽⁴⁾, наблюдалась необратимая адсорбция. Величины необратимой адсорбции возрастают с увеличением температуры обработки образцов ($150^\circ 6,4 \mu\text{M}/\text{м}^2$, $260^\circ 7,75 \mu\text{M}/\text{м}^2$). В рассматриваемой области температур величины необратимой адсорбции на TiO_2 более чем в 5—10 раз превосходят соответствующие величины для кристаллического кремнезема ⁽¹⁰⁾. Процессы дегидратации и регидратации обратимы. Как видно из рис. 2, начальные участки изотерм вторичной адсорбции на образце, прокаленном при 260° , удовлетворительно укладываются на обратимую изотерму для исходного образца. Интересно отметить, что регидратация поверхности дегидратированных при рассматрива-

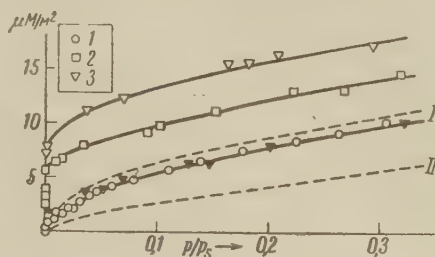


Рис. 2. Удельные изотермы адсорбции на образцах TiO_2 , откаченных при 25° (1), 150° (2) и 260° (3), кварца кв-5 при 25° (I) и силикагеля К-2 при 25° (II) ⁽¹⁰⁾. Черные знаки соответствуют вторичной адсорбции

емых температурах образцов протекает полностью уже при низких давлениях пара. Как видно из рис. 2, практически при нулевом давлении изотермы адсорбции на образцах, обработанных при 150 и 260°, достигают значений, близких к отмеченным выше величинам несобратимой адсорбции. Заметного уменьшения скорости поглощения паров воды в этой части изотермы не наблюдалось, в противоположность регидратации прокаленных кремнеземов, где процесс регидратации при низких давлениях протекает крайне медленно⁽¹⁴⁾. Легкость, с которой поверхность отдает свою воду и снова регидратируется, указывает на отсутствие существенной перестройки решетки поверхности в этом интервале температур.

С увеличением температуры прокаливания выше 460° удельная поверхность образца испытывает резкое падение. Значительное сокращение поверхности при высоких температурах наблюдалось ранее в работах^(3,15). Причину такого сокращения авторы⁽³⁾ видят в фазовом превращении, происходящем в образце. Как известно, фазовый переход низкотемпературной модификации TiO_2 — анатаза в более устойчивую модификацию — рутил происходит при высокой температуре. В литературе⁽¹⁶⁾ приводятся различные значения для температуры этого перехода (от 825 до 1000°). Авторы^(3,5) справедливо отмечают, что перестройка решетки в структуру рутила начинается на поверхности при значительно более низких температурах*. В интервале температур, соответствующем резкому изменению удельной поверхности в четыре раза (рис. 1 б), содержание структурной воды в 1 г образца уменьшается незначительно (рис. 1 а). Рассчитанное на единицу поверхности содержание структурной воды при этом несколько возрастает (рис. 1 в). Наблюдаемое повышение концентрации структурной воды на поверхности, вероятно, связано с перестройкой поверхности анатаза в более плотную структуру рутила. Необходимо отметить, что при этих же температурах наблюдались резкие изменения в каталитической активности и избирательности катализа на TiO_2 ⁽³⁾. Наши экспериментальные результаты хорошо согласуются с данными⁽³⁾ и подтверждают точку зрения авторов⁽³⁾ о роли полиморфных превращений в TiO_2 на физико-химические свойства его поверхности. Эти данные показывают, что поверхностные свойства — чувствительный индикатор на происходящие в твердом теле фазовые превращения.

С увеличением температуры прокаливания выше 600° происходит дальнейшая дегидратация поверхности. При температуре прокаливания 400° образец TiO_2 начинает заметно сереть. В продуктах дегидратации при этом обнаруживается небольшое количество (0,2—0,3 $\mu\text{M}/\text{m}^2$) газа, невымержающего в ловушке с жидким азотом. Как показано в исследованиях^(15,18), при прокаливании TiO_2 имеет место выделение кислорода и, обратно, кислород может поглощаться образцом при высоких температурах. Авторы⁽¹⁵⁾ считают, что при высоких температурах кислород выделяется за счет перехода TiO_2 в окись титана TiO . Химический анализ нашего образца, прокаленного при 1100°, показал наличие около 0,3% трехвалентного титана-ионов двухвалентного титана, в противоположность⁽¹⁵⁾, не обнаружено. Измерения⁽¹⁹⁾ магнитных свойств показали, что при восстановлении TiO_2 на поверхности образуется достаточно высокая концентрация ионов Ti^{3+} . Последний входит в состав природного минерала аносовита^(20,21).

В настоящее время трудно дать сколько-нибудь полную интерпретацию природы воды, выделяющейся из двуокиси титана при ее прокаливании. Авторы⁽⁵⁾ называют воду, содержащуюся в двуокиси титана, «осмотически связанной» водой. Однако растворение воды в плотной решетке анатаза кажется маловероятным. Кристаллогидратных форм в ряду анатаз — рутил не известно. Более вероятно поверхностное происхождение выделяющейся из TiO_2 воды. На это указывает отсутствие замедленной кинетики поглоще-

* При исследовании фазового перехода $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ в $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ было показано, что на поверхности переход начинается при значительно более низких температурах, чем в объеме⁽¹⁷⁾.

ния воды, которая происходит при диффузии пара внутрь решетки твердого тела. Атомы Ti в структуре TiO_2 имеют координационное число 6. На поверхности координационная сфера титанокислородных октаэдров будет ненасыщенной. Согласно ⁽²²⁾ оптимальная экранировка ионов Ti может быть осуществлена, в частности, как за счет их насыщения валентно связанными гидроксильными группами, так и за счет молекул воды, как это имеет место в случае окислов SiO_2 и Al_2O_3 ^(10, 17). С повышением температуры при прокаливании образца в первую очередь будет удаляться координационная вода. При дальнейшем увеличении температуры, когда на поверхности начнется фазовый переход, сопровождающийся деформацией и затем перестройкой решетки анатаза ⁽³⁾, будут удаляться также более прочно связанные с поверхностью гидроксильные группы. В области высоких температур уменьшение степени гидратации поверхности в известной мере может быть также связано с изменением валентности иона Ti^{4+} . Наличие структурной воды на поверхности вплоть до температур, при которых протекают каталитические процессы, необходимо учитывать при рассмотрении элементарного каталитического акта. Возможно, что, наряду с рассмотренными в ⁽³⁾ схемами каталитических реакций разложения спирта на поверхностных атомах кислорода и титана, реакция дегидратации спирта может происходить также путем образования поверхностных эфиров, при взаимодействии молекул спирта с гидроксильными группами поверхности, как это, например, происходит в реакциях дегидратации спиртов на алюмосиликатах ⁽²³⁾. Эфирные соединения Ti хорошо известны. В теоретических расчетах энергии адсорбционных взаимодействий, которые авторы ^(1, 2) оставляли с величинами теплот адсорбции, измеренными на образцах обработанных при сравнительно высоких температурах, не учитывались процессы гидратации, протекающие на поверхности, и изменения валентности части ионов Ti^{4+} . Следует отметить, что рассмотрение энергии адсорбции как локальных взаимодействий адсорбированной молекулы с атомами решетки TiO_2 вряд ли строго. В случае TiO_2 , являющегося полупроводником ⁽¹⁸⁾, необходимо рассматривать адсорбированные молекулы и решетку адсорбента как единую квантовомеханическую систему ⁽²⁴⁾.

Авторы выражают глубокую благодарность С. Г. Моисову за предоставление образцов и их анализ.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ F. H. Healey, J. J. Chessick et al., J. Phys. Chem., 58, 887 (1954).
- J. J. Chessick, A. C. Zettlemoyer et al., Canad. J. Chem., 33, 251 (1955).
- A. М. Рубинштейн, С. Г. Куликов, Изв. АН СССР, ОХН, 1950, № 1, 84;
- 1951, № 2, 133. ⁴ K. S. Rao, J. Phys. Chem., 45, 500 (1941). ⁵ G. F. Hüttig,
- K. Kosterhon, Koll. Zs., 89, 202 (1939). ⁶ М. М. Егоров, Т. С. Егорова,
- Г. Красильников, В. Ф. Киселев, ЖФХ, 32, 2624 (1958). ⁷ H. K. Livingston,
- J. Am. Chem. Soc., 66, 569 (1944). ⁸ G. Yura, W. D. Harkins,
- Am. Chem. Soc., 66, 1356 (1944). ⁹ E. H. Loeser, W. D. Harkins, J. Phys.
- Chem., 57, 591 (1953). ¹⁰ Л. Г. Ганиченко, М. М. Егоров, В. Ф. Киселев,
- Г. Красильников, Г. С. Ходаков, ДАН, 131, 597 (1960). ¹¹ Д. П. До-
- рычин, Ю. Н. Андреев, ЖФХ, 28, 22 (1954). ¹² С. П. Жданов, Ю. Н. Ан-
- дреев, Тр. Гос. оптич. инст., 24 (145), 210 (1956). ¹³ Ю. Н. Андреев, ЖФХ, 33,
- 295 (1959). ¹⁴ С. П. Жданов, Поверхностные химические соединения и их роль
- в явлениях адсорбции, М., 1957, стр. 129. ¹⁵ A. W. Czander, J. M. Honig,
- J. Phys. Chem., 63, 620 (1959). ¹⁶ А. В. Памфилов, Е. Г. Иванчева, ЖОХ,
- 2774 (1937); 10, 154 (1940). ¹⁷ М. М. Егоров, В. Ф. Киселев, К. Г. Кра-
- сильников, Ю. П. Симанов, Изв. высш. уч. зав., химия, 2, 360 (1959).
- L. H. Reyerson, J. M. Honig, J. Am. Chem. Soc., 75, 3917 (1953).
- T. J. Gray, C. S. McCain, N. G. Masse, J. Phys. Chem., 63, 472 (1959).
- А. А. Русаков, Г. С. Жданов, ДАН, 77, 411 (1951). ²¹ Н. Е. Фило-
- енко, В. И. Кудрявцев, И. В. Лавров, ДАН, 86, 561 (1952).
- W. A. Weyl, E. S. Marboe, Some Mechanical Properties of Glasses and Crystals
- Affected by Changes in Chemical Binding Forces, Munich, 1959. ²³ К. В. Топчиева,
- Ю. Н. Пинь, И. В. Смирнова, Поверхностные химические соединения и их
- роль в явлениях адсорбции, М., 1957, стр. 311. ²⁴ Ф. Волькенштейн, Элек-
- тронная теория катализа на полупроводниках, М., 1960.

Н. С. ГАРИФЬЯНОВ

О СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЕ ЛИНИИ Э.П.Р. В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ СОЛЕЙ V^{2+}

(Представлено академиком А. Е. Арбузовым 19 I 1961)

В жидких растворах солей парамагнитных ионов элементов группы железа сверхтонкая структура (с. т. с.) линий электронного парамагнитного резонанса (э. п. р.) в условиях сильных полей исследована только для Mn^{2+} , VO^{2+} и Cu^{2+} (1-8). Данные по с. т. с. в жидких растворах для других парамагнитных ионов этой группы не были получены либо из-за большой ширины линий э. п. р. (Co^{2+} , V^{3+}), либо из-за малости магнитных моментов ядер.

Наши исследования э. п. р. фиолетовых растворов солей VCl_2 производились на частоте 9598 Мгц в интервале температур 295—400° К. В ка

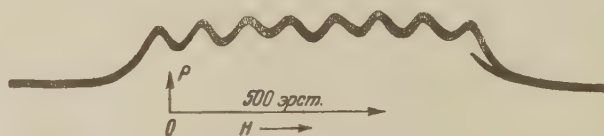


Рис. 1. Спектр с. т. с. линии э. п. р. раствора 0,05 м/л VCl_2 в воде; $\nu=9598$ Мгц, $T=400^\circ K$

честве растворителей использовалась вода, спирты и глицерин. Исследуемый раствор запаивался в стеклянную барометрическую трубку со специальным нагревательным устройством, которая затем помещалась в пучность магнитных силовых линий прямоугольного резонатора H_{103} . Методика этих измерений описана в работе (9). В водных растворах VCl_2 в пределах концентрации 0,5—0,05 м/л при комнатной температуре наблюдается единственная линия э. п. р. с шириной $\Delta H = 800$ эрст. с фактором спектроскопического расщепления $g = 1,96 \pm 0,01$. Ширина этой линии определяется неразрешенной с. т. с.

При повышении температуры раствора до 400° К удалось обнаружить 8 пиков почти изотропной с. т. с., соответствующих ядерному спину $I = 7/2$ V^{51} . Вид спектров с. т. с. при 400° К в пределах концентрации 0,5—0,05 м/л практически не меняется. Как видно из рис. 1, спектр с. т. с. разрешается неполностью.

Следует отметить, что при нагревании растворов VCl_2 сильного окисления не происходит, так как при повторном повышении или понижении температуры соответствующая интенсивность линий э. п. р. практически сохраняется.

Графический анализ спектров показал, что ширина ΔH компоненты с. т. с. линий поглощения VCl_2 0,05 м/л в воде при $T = 400^\circ K$ составляет ~ 100 эрст. Для комнатной температуры ширина неразрешенных компонент с. т. с. должна быть ~ 300 эрст. Положение 8 резонансных линий с. т. с. может быть описано выражением

$$H^* = H_0 - A_m - \frac{A}{2H_0} [I(I+1) - m^2] - \frac{A^2 m}{2H_0} (2M-1); \quad (1)$$

здесь H^* — резонансное значение статического магнитного поля H , A — константа сверхтонкого расщепления, m и M — магнитные квантовые числа ядра и электронной оболочки исследуемого иона соответственно, $H_0 = \frac{h\nu}{g\beta}$; хорошее согласие с опытом было получено при значениях $A = 96$ эрст. и $g = 1,965 \pm 0,002$. Уравнение (1) вытекает из общей теории структуры линий парамагнитного резонанса при допущении, что тонкие расщепления линий, обязанные действию локальных электрических полей, отсутствуют или весьма малы по сравнению со сверхтонким расщеплением.

В некоторых твердых растворах солей V^{2+} , имеющего основное состояние $^4F_{3/2}$, константа тонкого расщепления больше или сравнима с константой A . В этих твердых растворах g -фактор изотропен.

В водных растворах 0,05 м/л VCl_2 ширина ΔH компонент с. т. с. линий э. п. р. почти на порядок больше по сравнению с ΔH компонент с. т. с. в соответствующих по концентрации водных растворах Mn^{2+} и VO^{2+} . Поэтому приходится делать предположение о том, что в фиолетовых водных растворах солей VCl_2 ширина компонент с. т. с. определяется в основном тонкими расщеплениями. Это предположение также объясняет отсутствие концентрационной зависимости ширины ΔH компоненты с. т. с. линий э. п. р. в растворах VCl_2 . Мы считаем, что электрическое поле на ионе V^{2+} в фиолетовых водных растворах VCl_2 имеет в основном кубическую симметрию с небольшой примесью полей осевой симметрии, создаваемых несколько искаженным октаэдром воды вследствие эффекта Яна — Теллера. Эти электрические поля движения усредняются не полностью. Кроме того, на ион V^{2+} накладывается также небольшая примесь полей более низкой симметрии, обязанных действию частиц второй координационной сферы. По мере повышения температуры раствора это кристаллическое поле низкой симметрии на ионе V^{2+} усредняется движением и линия э. п. р. сужается.

В спиртовых и глицериновых растворах VCl_2 в интервале $T = 295—400^\circ K$ линию э. п. р. не удалось обнаружить. Такая большая ширина этих линий в указанных органических растворителях объясняется наличием сильной аксиальной компоненты кристаллического поля, которая обязана ионным молекулам (⁹, ¹⁰).

В этих органических растворителях в переохлажденном состоянии удалось обнаружить линию э. п. р. с $\Delta H = 1000$ эрст. (¹¹, ¹²).

Наконец, следует отметить, что константа A в водных растворах VCl_2 имеет ту же величину, что и в твердых растворах солей V^{2+} (³) и на 22 эрст. меньше, чем A в водных растворах $VOCl_2$ (¹⁴).

В заключение автор выражает благодарность Б. М. Козыреву за обсуждение результатов и Н. Ф. Усачевой за помощь в эксперименте.

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
17 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. S. England, E. E. Schneider, Physica, **17**, 221 (1951). ² M. Tinkham, R. Weinstein, A. F. Kip, Phys. Rev., **84**, 848 (1951). ³ M. A. Garstens, S. H. Libson, J. Chem. Phys., **20**, 1677 (1952). ⁴ Н. С. Гарифьянов, Б. М. Козырев, ДАН, **98**, 929 (1954). ⁵ Н. С. Гарифьянов, Б. М. Козырев, Уч. зап. Казанск. гос. унив. им. Ленина, **114**, 83 (1954). ⁶ Б. М. Козырев, Докт. диссертация, ФИАН, 1957. ⁷ S. R. Mc Garvey, J. Phys. Chem., **60**, 71 (1956). ⁸ А. И. Ривкинд, ДАН, **135**, 65 (1960). ⁹ В. И. Аввакумов, С. Н. Гарифьянов, Б. М. Козырев, П. Г. Тишков, ЖЭТФ, **37**, 1564 (1959). ¹⁰ В. И. Аввакумов, Н. С. Гарифьянов, Е. И. Семенова, ЖЭТФ, **39**, 1215 (1960). ¹¹ Н. С. Гарифьянов, ДАН, **103**, 41 (1955). ¹² Н. С. Гарифьянов, ДАН, **109**, 725 (1956). ¹³ B. Bleaney, D. J. E. Ingram, H. D. E. Scott, Proc. Phys. Soc., A **64**, 39 (1951). ¹⁴ R. N. Rogers, G. E. Pake, J. Chem. Phys., **33**, 1107 (1960).

А. В. ЕРМОЛИНА, Л. А. ИГОНИН, Л. А. НОСОВА,
И. И. ФАРБЕРОВА и К. Н. ВЛАСОВА

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРОВ С ИХ НАДМОЛЕКУЛЯРНЫМИ
СТРУКТУРАМИ

(Представлено академиком В. А. Каргиным 6 I 1961)

Структурные, главным образом электронномикроскопические, исследования последних лет (¹⁻⁷) показали, что полимеры представляют собой не хаотически перепутанную систему молекулярных цепей, а высокоупорядоченную систему пачек. Наряду с пачками в ряде кристаллических полимеров имеется часть вещества, находящаяся в глобулярном состоянии. Полимерные пачки, будучи независимыми структурными единицами, способны образовывать морфологические формы более высоких порядков.

Очевидно, что макроскопические свойства полимерных материалов тесно связаны не столько с относительной долей упорядоченного и неупорядоченного материала, сколько с возникновением и развитием в полимере тех или иных вторичных структур. Образование пачек молекул с определенной упорядоченностью цепей, возникновение пластинчатых образований и других надмолекулярных структур является важным фактором, в значительной мере определяющим макроскопические, в частности механические, свойства полимерных тел.

Нами сделана попытка на примере полиамидной смолы 68 сопоставить некоторые структурные и механические свойства с тем, чтобы выяснить относительную роль местной упорядоченности сегментов («степень кристалличности») и вторичных надмолекулярных структур в определении макроскопических свойств полимеров. В качестве объекта исследования была использована промышленная полиамидная смола 68 (полигексаметиленсебацинамид), широко применяющаяся в технике, в частности для изготовления подшипников скольжения, и хорошо работающая на износ. Образцы в виде брусочков $4 \times 6 \times 55$ мм отливались под давлением на литейной машине ЛМ-3 по обычным технологическим режимам литья и затем подвергались термической обработке в инертных средах (силиконовых маслах) при различных температурах и временах выдержки. Для каждой серии образцов проводилась оценка изменений как «степени кристалличности», так и сферолитной структуры полиамида.

«Степень кристалличности» оценивалась, как обычно принято, по интегральным интенсивностям наиболее характерных интерференций на кривой интенсивности исследуемого объекта. Кривые интенсивности по углам рассеяния рентгеновских лучей нами записывались на рентгеновском дифрактометре УРС-50-И с использованием фильтрованного медного излучения. Сферолитную структуру от полиамида получали с помощью микросъемки поверхности образца, которая предварительно полировалась и затем травилась трикрезолом. Микрофотографии поверхности образцов получались с помощью металлографического микроскопа МИМ-8 при 1000-кратном увеличении. Одновременно каждая серия образцов испытывалась на износостойкость, которая определялась как величина, обратная

износу (износ оценивался по потере объема при истирании), по сетке на испытательной машине типа Грассели.

В качестве технологических режимов термообработки были выбраны температуры 150 и 190°С и различные продолжительности прогрева, от 15 мин. до 30 час., для каждой температуры. Наблюдавшийся нами в результате прогрева переход исходного образца из одной формы, характеризующейся гексагональной ячейкой, в другую — триклинную, хорошо известен и описан в литературе (⁸, ⁹). Структура с триклинной ячейкой возникла уже после 15 мин. прогрева. Дальнейшая термообработка вызывала постепенное совершенствование рентгеновской картины, характеризовавшейся заметным ростом интерференций (100) и (010), а следовательно, и «степени кристалличности». При этом сделано интересное наблюдение, что при больших временах прогрева между рефлексам (100) и (010) триклинной ячейки вновь появляется интерференция, характерная для гексагональной ячейки. После 8 час. прогрева при 190° и 12 час. при 150° рост кристалличности прекращался и ощутимых изменений в структуре, по рентгеновским данным, не наблюдалось вплоть до 30 час. термообработки.

Было установлено, что сферолитная структура полиамида оказалась более чувствительной к изменениям режимов термообработки, чем «степень кристалличности». При малых временах прогрева наблюдался заметный рост размера сферолитов (от 1 до 5 μ), отдельные образования были значительно крупнее. После 8 час. прогрева при 190° и 10 час. при 150° началось постепенное разрушение сферолитных структур и поверхность образцов после 30 час. термообработки не давала картины, типичной для сферолитных образований.

Сопоставление структурных данных с результатами испытаний полиамида на износ показало, что не существует какой-либо определенной корреляции между «степенью кристалличности» и износостойкостью пластмассы. Так, например, у образцов с одинаковой «степенью кристалличности», но обработанных в разных температурных условиях, показатели по износостойкости не одинаковы. Для образцов, которые при длительной термообработке уже не изменяли значения «степени кристалличности», наблюдалось заметное снижение износостойкости в зависимости от времени прогрева.

Предварительные исследования показали, что наибольшую сопротивляемость износу имеют образцы, сферолитные образования которых характеризуются однородным размером в пределах 2—3 μ . Таким образом, существенную роль при износе полиамида играет однородность, размер и тонкая структура надмолекулярных образований. Поэтому при изучении связи механических свойств со структурой кристаллических полимеров важное значение имеет выяснение роли вторичных надмолекулярных образований в формировании этих свойств.

Авторы выражают глубокую благодарность акад. В. А. Каргину за обсуждение результатов, а также С. Б. Ратнеру за помощь в работе.

Научно-исследовательский институт
пластических масс

Поступило
15 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Каргин, Н. Ф. Бакеев, Х. Вергин, ДАН, 122, 97 (1958).
² В. А. Каргин, Т. А. Корецкая, Высокомолек. соед., 1, 1721 (1959).
³ В. А. Каргин, Н. Ф. Бакеев, Колл. журн., 19, 133 (1957). ⁴ П. В. Козлов, Ли Пан-тун, Н. Ф. Бакеев, Высокомолек. соед., 1, 1848 (1959). ⁵ П. В. Козлов, М. М. Иовлева, Ли Пан-тун, Высокомолек. соед., 2, 284 (1960).
⁶ П. В. Козлов, Н. Ф. Бакеев, Ли Пан-тун, А. С. Кафтanova, Высокомолек. соед., 2, 421 (1960). ⁷ A. Keller, Proceedings of the International Conference of Crystal Growth, N. Y., 1958; Химия и технология полимеров, № 7, 3 (1959).
⁸ I. Sandeman, A. Keller, J. Polym. Sci., 19, 401 (1956). ⁹ G. Bunn, E. Garner, J. Proc. Roy. Soc., London, A 189, 39 (1947).

Н. Н. КАВТАРАДЗЕ и В. И. ЛЫГИН

СТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ОКИСИ УГЛЕРОДА НА ПАЛЛАДИИ ПО ДАННЫМ АДсорбЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИНФРАКРАСНЫХ СПЕКТРОВ

(Представлено академиком В. И. Спицыным 30 XII 1960)

Адсорбция СО изучалась при температурах от -195° до 100° и давлениях от 10^{-6} до $2-4 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. на слоях палладия, конденсированных при $1-2 \cdot 10^{-7}$ мм рт. ст., и на палладии, нанесенном на аэросил. Устройство использованной аппаратуры, методика приготовления слоев, измерение давления и адсорбции описаны ранее (1). Образцы для спектрального исследования готовились пропиткой аэросила водным раствором $\text{PdCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

(2). Навески порошка аэросила в 150 мг прессовались затем в диски диаметром 28 мм под давлением 50 кг/мм². Диски помещались в специальную вакуумную кювету (3), откачивались при 300° в вакууме 10^{-5} мм рт. ст. и восстанавливались при 300° в атмосфере водорода при давлении 100 мм рт. ст. Окончательная очистка поверхности палладия достигалась тренировкой объекта при 300° в вакууме 10^{-5} мм рт. ст. в течение 5 час. Пропускание дисков состава 10% Pd и 90% SiO_2 в области 2000 см^{-1} достигало 10%.

Рентгенографическое исследование показало, что приготовленный таким образом палладий распределен в аэросиле в виде кристаллов с нормальной гране-

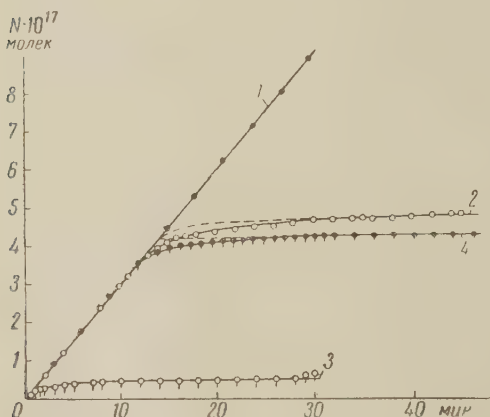


Рис. 1. Адсорбция СО при -195° на слое Pd толщиной 1160 Å: 1 — натекание в пустой реактор; 2 — суммарная адсорбция; 3 — обратимая адсорбция; 4 — прочная адсорбция

центрированной кубической решеткой со средним размером кристаллов в 140 Å. Спектры снимались при 25° на однолучевом инфракрасном спектрометре ИКС-12 с призмой NaCl.

Изучение адсорбции СО на Pd показало, что ее качественные особенности сходны с теми, которые характерны для адсорбции водорода на Cr, Fe, Ni, Pd (1). Даже при -195° окись углерода адсорбируется крайне быстро и скорость ее трудно измерима (рис. 1). За первую минуту после впуска газа поглощается свыше 90% общего количества газа, адсорбированного в опыте. Адсорбция полностью завершается через 15–20 мин. При повышенных температурах скорость адсорбции еще более высока.

Суммарная адсорбция при исследованных температурах складывается из прочной, необратимой адсорбции и слабой, обратимой адсорбции. Прочная адсорбция протекает быстро, а обратимая — практически мгновенно. Прочная адсорбция СО уменьшается при повышении температуры, а обратимая адсорбция увеличивается по мере повышения температуры и давления. Мгновенное протекание и полная обратимость слабой адсорбции при всех

температурах позволяет рассматривать ее как функцию давления. Начальная часть изотерм слабой адсорбции следует логарифмической зависимости, найденной А. Н. Фрумкиным и А. Н. Шлыгиным (4), а ее конечная часть — уравнению Лэнгмюра. В целом (рис. 2) суммарное поглощение практически не зависит от последовательности изменений температуры, поскольку кривые адсорбции, начиная от низких (-195°) до больших температур (100°) и снова до низких, хорошо воспроизводятся. Эти факты указывают на равновесный характер адсорбции.

Была произведена оценка долей прочной и слабой адсорбции (ее предел насыщения рассчитывался по методу прямолинейных анаморфоз уравнения Лэнгмюра). Доли прочной и слабой адсорбции (по пределу насыщения) в суммарном поглощении соответственно равны при -78° 92 и 8%; при 0° 84 и 16%; при 50° 75 и 25%. В работе (5) найдено, что слабая адсорбция при 0° и давлении 10^{-2} мм рт. ст. составляет 5%.

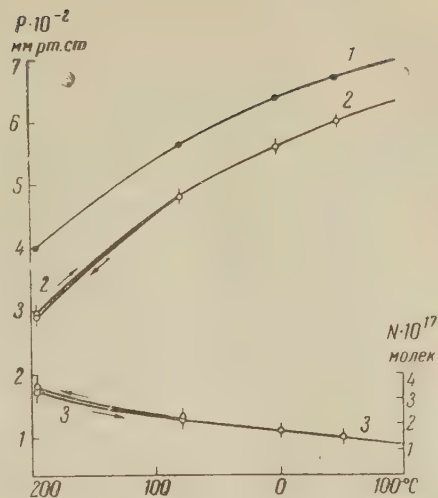


Рис. 2. Адсорбция СО (при постоянном количестве СО в системе) слоем Pd толщиной 510 Å: 1 — калибровочная кривая изменения давления СО в реакторе; 2 — изменения давления СО в присутствии слоя Pd; 3 — адсорбция СО на Pd

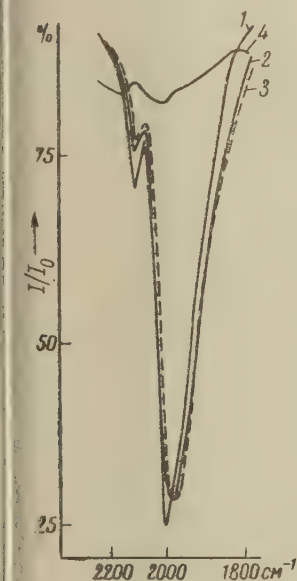


Рис. 3. Спектр соединений окиси углерода на поверхности палладия: 1 — при давлении СО 1,5 мм рт. ст.; 2 — после откачки до давления 10^{-4} мм рт. ст.; 3 — в присутствии O_2 при давлении 8 мм рт. ст.; 4 — после обработки O_2 при давлении 8 мм рт. ст. при 200° в течение 5 мин.

Адсорбция СО на палладии, нанесенном на аэросил, сохраняет все особенности адсорбции газа на конденсированных слоях металла. В этом случае также имеет место равновесное сосуществование прочной и слабой обратимой адсорбции, увеличение обратимой и уменьшение прочной адсорбции с ростом температуры. Обратимая адсорбция при 25° и давлении $2 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. составляет около 10%. Наличие адсорбции окиси углерода на палладии выше критической температуры газа ($-140,2^\circ$), существование прочной и обратимой части во всей исследованной области температур свидетельствует о химической природе поглощения. Существование двух видов хемосорбции — прочной и слабой — позволяет считать, что хемосорбированные молекулы могут находиться по крайней мере в двух формах. Для исследования этих форм использован метод инфракрасной спектроскопии, который впервые был применен к исследованию поверхностных соединений на металлах Терениным (6) и в последнее время использован в работах Эйшенса (7, 9) и Грязнова (8).

В спектре соединений окиси углерода на поверхности палладия при больших значениях (рис. 3, 1) наблюдаются полосы 2085 и 1990 $см^{-1}$. Откачивание образца до давления 10^{-4} мм рт. ст. уменьшает интенсивность полос и в спектре наблюдаются полосы с максимумами 2085 и 1960 $см^{-1}$ (рис. 3, 2). Полосы поглощения в этой области, принадлежащие прочно хемосорбированным молекулам СО, наблюдались Эйшенсом (7, 9), и на

основании сравнения спектра поверхностных соединений СО со спектром карбониллов известной структуры были приписаны двум различным формам связи молекул СО с поверхностными атомами Pd. Можно считать, что полоса 2085 см^{-1} принадлежит валентным колебаниям группы СО, связанной с

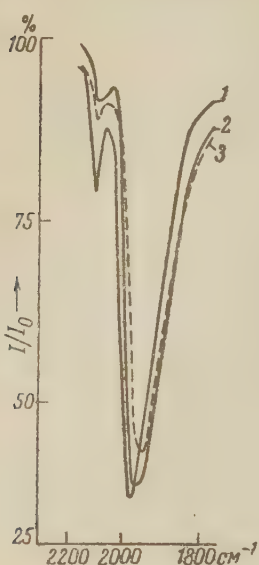


Рис. 4. Спектр соединений окиси углерода на поверхности палладия: 1 — после откачки до 10^{-4} мм рт. ст.; 2 — после обработки H_2 при давлении 1 мм рт. ст. при 200° в течение 15 мин.; 3 — после обработки в течение 30 мин.

одним поверхностным атомом Pd, так называемой линейной структуре, а полоса 1960 см^{-1} колебаниям группы СО, связанной с двумя поверхностными атомами Pd, так называемой мостиковой структуре. Соотношение интенсивности полос на спектрограммах (рис. 3, 4, 1) указывает, что поверхностные соединения на поверхности палладия существуют преимущественно в виде мостиковых форм. Изменение спектра (рис. 3, 1, 2) при откачивании образца в вакууме 10^{-4} мм рт. ст. свидетельствует об удалении в основном линейных форм (уменьшение интенсивности полосы 2085 см^{-1}) и части более слабо связанных с поверхностью молекул СО мостиковой формы (уменьшение интенсивности и сдвиг полосы 1960 см^{-1}). Не удается наблюдать отдельной полосы поглощения обратимо сорбированных молекул, по-видимому, вследствие малости величин обратимой адсорбции при исследуемых температурах и давлениях, а возможно и вследствие слабой локализации обратимо адсорбированных молекул на поверхностных атомах Pd.

Впуск кислорода при давлении 8 мм рт. ст. и 25° практически не изменяет спектра поверхностных соединений СО. Это свидетельствует о существовании в реакции окисления индукционного периода (5). Обработка поверхностных соединений СО кислородом при 200° ускоряет этот процесс (рис. 3, 4). В спектре при этом остаются полосы поглощения небольшой интенсивности 1995 и 2120 см^{-1} ,

которые могут быть приписаны оставшимся на поверхности соединениям СО, возмущенным хемосорбированным O_2 .

Реакция поверхностных групп СО с водородом проходит медленнее (рис. 4). В результате реакции уменьшается интенсивность полос поглощения линейной и мостиковых структур и наблюдается их смещение в сторону длинных волн: полоса мостиковых форм смещается до 1940 см^{-1} (рис. 4, 3). Смещение в противоположные стороны полос поглощения поверхностных соединений СО при реакции с кислородом и водородом наблюдается на других металлах (7) и объясняется изменением электронного состояния поверхности металла вследствие различия электроноакцепторных свойств O_2 и H_2 , адсорбирующихся на поверхности в процессе реакции.

Таким образом, адсорбционные данные позволяют разграничить существование на поверхности двух видов адсорбции: слабой обратимой и прочной необратимой. Инфракрасные спектры указывают, что прочно адсорбированные молекулы окиси углерода существуют в основном в виде мостиковых структур.

Институт физической химии.
Академии наук СССР

Поступило
28 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Кавтарадзе, ДАН, 114, № 4, 822 (1957). ² В. И. Лыгин, Н. Н. Кавтарадзе, Е. Г. Борескова, ЖФХ, 35, № 4 (1961).
- ³ Н. Н. Кавтарадзе, В. И. Лыгин, ЖФХ, 34, 462 (1960). ⁴ А. Н. Фрумкин, А. Н. Шлыгин, ДАН, 2, 176 (1934). ⁵ S. J. Stephens, J. Phys. Chem. 63, 188 (1959). ⁶ А. Н. Теренин, ЖФХ, 14, 1362 (1940). ⁷ R. P. Eischens, W. A. Pliskin, Advances in Catalysis, 10, 1 (1958). ⁸ В. М. Грязнов, В. Д. Ягодовский, А. М. Богомольный, Хо Дю Ок, ДАН, 121, 499 (1958). ⁹ R. P. Eischens, S. A. Francis, W. A. Pliskin, J. Phys. Chem. 60, 194 (1958).

В. Н. СОКОЛОВ, И. Я. ПОДДУБНЫЙ, В. В. ПЕРЕКАЛИН и В. Ф. ЕВДОКИМОВ
ПОЛИМЕРИЗАЦИЯ НИТРОЭТИЛЕНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ
 γ -ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 20 XII 1960)

Непределенные нитросоединения интересны возможностью превращения их в полимерные материалы, стойкие к действию различных растворителей и обладающие удовлетворительной термостойкостью. Полимеризация простейшего нитроалкена — нитроэтилена под влиянием воды ^(1,2), водных растворов карбонатов щелочных и щелочноземельных металлов ^(3,4), неорганических и органических оснований, протекающая по ионному механизму ⁽⁴⁾, приводит к образованию порошкообразного низкомолекулярного полимера (мол. вес до 2000). Изучены некоторые физические свойства такого полимера (теплота взрыва, чувствительность к удару, работа взрыва) ⁽⁵⁾.

Полимеризацией в растворителях, растворяющих как нитроэтилен, так и его полимер (N,N-диметилформамид, тетрагидрофуран), были получены высокомолекулярные продукты ⁽⁶⁾, которые, однако, представляли собой порошкообразный полимер.

Из приведенных литературных данных следует, что при полимеризации нитроэтилена в присутствии инициатора в среде растворителя получают порошкообразные продукты, загрязненные инициатором и растворителем. Известно, что при проведении полимеризации под действием ионизирующего излучения чистота полимера соответствует чистоте исходного мономера. Кроме того, радиационная полимеризация может быть легко осуществлена в отсутствие растворителя, так как имеется возможность точной регулировки скорости полимеризации изменением интенсивности излучения.

В связи с указанным мы поставили перед собой задачу выявить возможность и разработать условия получения высокомолекулярного полинитроэтилена полимеризацией в массе под действием γ -излучения.

Источником излучения служил радиоактивный Co^{60} . Конструкция примененной в данной работе радиационной установки описана Брегером и др. ⁽⁹⁾. Активность источника, равная 1450 г-экв Ra, обеспечивала мощность дозы от 0,28 до 0,72 млн. г в 1 час. Для полимеризации применяли нитроэтилен, полученный дегидратацией 1-нитроэтанола-2 фталевым ангидридом ^(6,7). Мономер подвергали многократной фракционной перегонке, и отбирали фракции с т. кип. $36^\circ/100$ мм. Стеклообразные ампулы, предварительно продутые горячим азотом, взвешивали и заполняли свежеперегнанным нитроэтиленом. Для удаления окклюдируемого кислорода воздуха производили обычные операции замораживания и плавления. Запаянные под вакуумом ампулы помещали в рабочую камеру радиационной установки. Облучение производилось при 20° . После облучения ампулы вскрывали и мономер отгоняли под вакуумом. Выход полимера определялся весовым способом.

На рис. 1 приведена зависимость степени конверсии мономера от интегральной дозы облучения при мощностях дозы 0,28 (1) и 0,49 (2) Мг/час.

В начальный период облучения ($1 \cdot 10^6$ г) прозрачный мономер мутнеет и затем выпадает белый осадок ($5 \cdot 10^6$ г), идентичный полимеру, полученному под влиянием органических оснований ⁽⁴⁾.

При дальнейшем облучении образовавшаяся пастообразная смесь полимера и мономера превращается в прозрачный слабо-желтый блок полимера. Образование блочного полимера, по-видимому, связано с протеканием вторичных реакций присоединения растущих полимерных цепей к ранее

образовавшемуся полимеру и сопровождается увеличением его молекулярного веса. Интересно указать, что образования блочного полинитроэтилена не происходит при мощностях дозы $> 0,3$ Мг/час. В этом случае вплоть до 100% конверсии полимер остается порошкообразным, а его цвет меняется от белого до светло-коричневого. Следует отметить, что образование прозрачного блочного полинитроэтилена — весьма сложный физико-химический процесс, зависящий от многих факторов, поэтому иногда при 100% конверсии образуется частично и порошкообразный полимер.

Было установлено, что частично заподимеризованные образцы нитроэтилена продолжают полимеризоваться и после прекращения облучения. Это позволяет сделать заключение об образовании под действием γ -излучения сравнительно долго живущих полимерных радикалов.

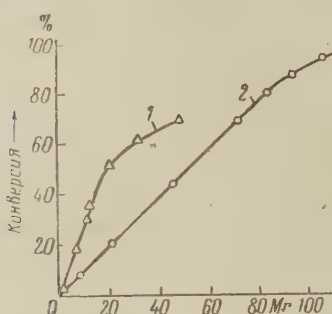


Рис. 1

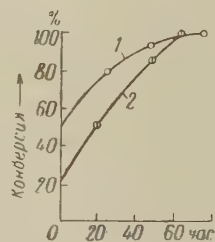


Рис. 2

Характер протекания послерадиационной полимеризации при начальной 50% (1) и 20% (2) конверсии приведен на рис. 2.

При послерадиационной полимеризации также имеет место образование блочного полинитроэтилена.

Процесс полимеризации нитроэтилена под действием γ -излучения ингибируется гидрохиноном и кислородом, что также указывает на его радикальный характер. Полученный радиационный полинитроэтилен нерастворим в обычных растворителях, но хорошо растворим в N,N-диметилформамиде; характеристическая вязкость его в этом растворителе равна 0,38, что соответствует ⁽⁵⁾ молекулярному весу 38 000. Плотность блочного полинитроэтилена $d_{20} 1,535$, т. разл. 150° .

Элементарный анализ полимера указывает на отсутствие реакции денитрации в процессе облучения: $(-\text{CH}_2-\text{CHNO}_2)_n$. Вычислено: N 19,2%. Найдено: N 19,1%.

Рентгенографический анализ полимера показал, что кристаллическая фаза в нем отсутствует. Интенсивное узкое гало и слабое широкое гало отвечает параметрам ближнего порядка $5,15 \text{ \AA}$ и $3,73 \text{ \AA}^*$ (см. рис. 3 на вклейке).

Было также установлено, что нитроэтилен под действием γ -излучения легко сополимеризуется с другими непредельными нитросоединениями, например 1,4-динитробутадиеном-1,3.

Поступило
17 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Wieland, E. Sakkellarios, Ber., 52, 898 (1919). ² A. Smith, Pat. USA 2385037, 1945; Chem. Abstr., 40, 347 (1946). ³ A. Smith, C. W. Scaife, R. H. Stanley, Pat. USA 2384049, 1945; Chem. Abstr., 40, 348 (1946). ⁴ D. Vofsi, A. Katchalsky, J. Polym. Sci., 26, 127 (1957). ⁵ Ю. Гродзинский, А. Качальский, Д. Вофси, Международн. симпозиум по макромолекулам, Докл. и реф., Секция 2, 1960, стр. 221. ⁶ G. Buckley, C. Scaife, J. Chem. Soc., 1947, 1477. ⁷ G. Buckley, C. Scaife, Brit. pat. 595282, 1947; Chem. Abstr., 42, 37775 (1948). ⁸ J. Csaba, G. Janos, Magyar kem. folyóirat, 64, № 12, 468 (1958). ⁹ А. Х. Брегер и др., Действие ионизирующих излучений на неорганические и органические полимерные системы, Изд. АН СССР, 1958.

* Рентгеноструктурный анализ полимера был произведен С. Г. Струнским.



Рис. 1. РНК из раствора с ионной силой 0,075 при комнатной температуре. $80000\times$. Отношение высоты объекта к длине тени $1:7,3 \pm 0,4$



Рис. 3. РНК из раствора с ионной силой 0,00075 при 70° . $80000\times$. Отношение высоты объекта к длине тени $1:9,6 \pm 0,4$



Рис. 2. РНК из раствора с ионной силой 0,0075 при комнатной температуре. $80000\times$. Отношение высоты объекта к длине тени $1:9,6 \pm 0,4$

К статье В. Н. Соколова и др., стр. 619



Рис. 3

В. М. ТАТЕВСКИЙ, В. П. СПИРИДОНОВ и П. А. АКИШИН

ОБ ОДНОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В МЕЖАТОМНЫХ РАССТОЯНИЯХ
МОЛЕКУЛ ГАЛОГЕНИДОВ РАЗНЫХ ГРУПП
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ *

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 4 I 1961)

Ранее одним из нас ⁽⁴⁾ при рассмотрении экспериментальных данных по геометрии молекул в газовой фазе был сделан вывод о том, что геометрическая конфигурация молекул AX_n (где X — галоген) качественно не меняется при замене центрального атома A атомом другого элемента A' из той же группы (или подгруппы) периодической системы при сохранении у атома A' валентности, последовательности и кратности связей, присущих атому A. Конфигурация молекул AX_n не меняется также при замене одного или нескольких атомов X, связанных с данным центральным атомом A, другими атомами галогенов. Поэтому молекулы типа AX_n могут быть сгруппированы в ряды сходных молекул, в которых обнаруживается определенная закономерность в значениях межатомных расстояний.

Перенумеруем группы (подгруппы) периодической системы, к которым принадлежит элемент A, индексом k , элементы A в k -й группе (подгруппе) — индексом i (или l), а элементы X в группе галогенов — индексом j (или m). Так, например, если A — атом элемента 2-й группы, то $A^{(21)} \equiv Be$, $A^{(22)} \equiv Mg$, $A^{(23)} \equiv Ca$ и т. д.; для галогенов $X^{(1)} \equiv F$, $X^{(2)} \equiv Cl$, $X^{(3)} \equiv Br$, $X^{(4)} \equiv J$. Фиксируем

группу k и рассмотрим межатомные расстояния $A^{(ki)} - X^{(j)}$ в рядах галогенидов AX_n , составляющих табл. 1, в которой число строк равно числу элементов $A^{(ki)}$ в k -й группе (подгруппе), а число столбцов — числу галогенов $X^{(j)}$. Здесь имеются следующие ряды сходных молекул: ряды молекул по строкам, отличающиеся друг от друга атомами элемента $A^{(ki)}$, и ряды молекул по столбцам, отличающиеся атомами галогенов $X^{(j)}$.

* Настоящая работа выполнена авторами несколько лет назад как часть более обширного исследования. Ее результаты последние три года использовались в курсе «Строение молекул», читаемом на химическом факультете Московского университета (см. также ^(1,2)). К аналогичным выводам независимо пришли авторы ⁽³⁾.

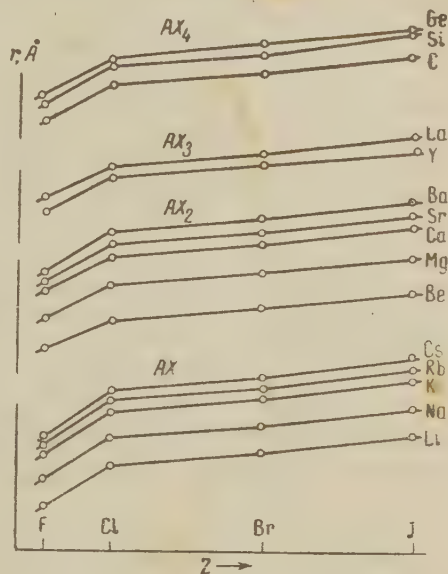


Рис. 1. Зависимость межатомных расстояний A—X в молекулах AX_n от порядкового номера атомов галогенов

Таблица 1

$A^{(k1)}X_n^{(1)}$	$A^{(k1)}X_n^{(2)}$	$A^{(k1)}X_n^{(3)}$	$A^{(k1)}X_n^{(4)}$
$A^{(ki)}X_n^{(1)}$	$A^{(ki)}X_n^{(2)}$	$A^{(ki)}X_n^{(3)}$	$A^{(ki)}X_n^{(4)}$
$A^{(kl)}X_n^{(1)}$	$A^{(kl)}X_n^{(2)}$	$A^{(kl)}X_n^{(3)}$	$A^{(kl)}X_n^{(4)}$
.....

На рис. 1 приведены графики зависимости межатомных расстояний $A-X$ в молекулах галогенидов 1—4 группы от порядкового номера Z_j атомов галогенов*. При этом получается семейство графиков, имеющих приблизительно одинаковый вид. Аналогичные графики получаются для галогенидов элементов других групп периодической системы. Очевидно, зависимость межатомных расстояний $A-X$ в этих молекулах от порядкового номера атомов галогенов приближенно можно выразить через некоторую функцию,

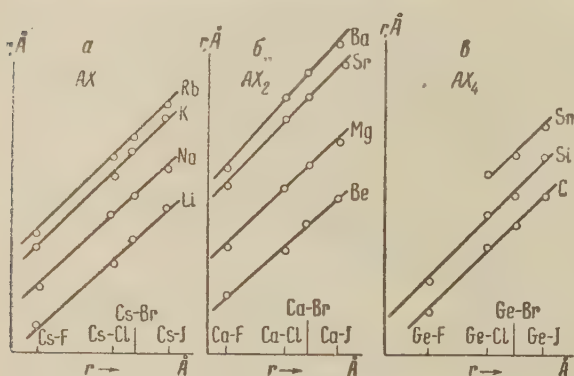


Рис. 2. Закономерность в значениях межатомных расстояний $A-X$: a — для галогенидов элементов 1-й группы (по оси абсцисс отложены межатомные расстояния в галогенидах цезия), b — для галогенидов элементов 2-й группы (по оси абсцисс отложены межатомные расстояния в галогенидах кальция), v — для галогенидов элементов 4-й группы (по оси абсцисс отложены межатомные расстояния в галогенидах германия)

чающихся атомами $A^{(kl)}$, согласно (1) будем иметь

$$\varphi^{(k)}(z_j) = \frac{r_{ij}^{(k)} - a_i^{(k)}}{b_i^{(k)}} = \frac{r_{ij}^{(k)} - a_l^{(k)}}{b_l^{(k)}}, \quad (2)$$

откуда

$$r_{ij}^{(k)} = c_{il}^{(k)} r_{il}^{(k)} + d_{il}^{(k)}, \quad (3)$$

где $c_{il}^{(k)}$ и $d_{il}^{(k)}$ не зависят от j , т. е. межатомные расстояния $A^{(ki)}-X^{(i)}$ молекул i -й строки табл. 1 могут быть представлены линейной функцией межатомных расстояний молекул l -й строки.

Если рассмотреть ряды молекул AX_n по столбцам табл. 1, то аналогично можно получить уравнение

$$r_{ij}^{(k)} = c_{mj}^{(k)} r_{im}^{(k)} + d_{mj}^{(k)}, \quad (4)$$

* Межатомные расстояния $A-X$ для галогенидов элементов 1-й группы заимствованы из микроволновой работы (1), причем для фторидов лития, натрия, калия и рубидия использованы значения, оцененные в этой работе по полуэмпирической формуле; для галогенидов элементов 2-й группы, а также для галогенидов лития, лантана и неодима — из электронографических работ (2, 3), для остальных галогенидов — из (4).

т. е. межатомные расстояния $A^{(ki)} - X^{(l)}$ молекул j -го столбца табл. 1 могут быть представлены линейной функцией межатомных расстояний молекул m -го столбца.

Отмеченная закономерность может быть проиллюстрирована графически (рис. 2) для галогенидов разных групп периодической системы (см. подробнее (1, 2)).

Таким образом, в рядах указанных галогенидов $AХ_n$ приближенно осуществляется линейная зависимость межатомных расстояний $A - X$. Поскольку в этих рядах последовательность и кратность связей $A - X$ аналогичны и валентное состояние центральных атомов A одно и то же, то закономерное изменение межатомных расстояний $A - X$ в таких рядах объясняется периодическим изменением свойств атомов элементов одной группы (или подгруппы) периодической системы, т. е. в основе этой закономерности лежит закон периодичности Д. И. Менделеева. Периодичность в свойствах молекул была использована Д. И. Менделеевым (9) для предсказания ряда свойств (например удельного веса, температуры кипения и др.) соединений еще не открытых элементов. Для нахождения этих свойств бралось среднее арифметическое из соответствующих свойств соединений элементов, стоящих в периодической таблице справа и слева, сверху и снизу от данного элемента, т. е. фактически принималась линейная зависимость от порядкового номера элемента. В дальнейшем неоднократно производились попытки использовать закон периодичности для определения свойств ряда соединений по аналогичному свойству другого ряда соединений. В Советском Союзе этот метод был развит в работах В. А. Киреева (10, 11), а в последние годы в работах М. Х. Карапетянца (12-15).

Представляет интерес один частный случай обсуждавшейся выше закономерности. Очевидно, если в уравнении (1) коэффициенты $b_i^{(k)}$ для всех атомов элементов $A^{(hi)}$ равны, т. е. $b_i^{(k)} = b_i^{(h)}$, то уравнение (3) приобретает вид:

$$r_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(h)} + a_i^{(k)} - a_i^{(h)}. \tag{5}$$

Так как $a_i^{(k)}$ и $a_i^{(h)}$ не зависят от индекса j , то из уравнения (5) следует, что разности межатомных расстояний $A^{(hi)} - X^{(l)}$ для двух рядов сходных молекул, отличающихся атомами $A^{(hi)}$, не зависят от того, с какими атомами галогенов связаны атомы элементов $A^{(hi)}$. Следовательно, при этих условиях атомам $A^{(hi)}$ можно приписать некоторые эффективные постоянные радиусы. Совершенно аналогичные рассуждения можно провести и для атомов галогенов $X^{(l)}$.

Таким образом, в частном случае в рассмотренных рядах молекул приближенно могут быть введены эффективные атомные радиусы, постоянные в рассматриваемой совокупности рядов молекул, сумма которых будет равна соответствующему межатомному расстоянию. Изложенное иллюстрируется табл. 2 для молекул галогенидов щелочных элементов, рассмотрение которой показывает, что соответствующие разности сохраняются постоянными с максимальным отклонением от среднего $\pm 0,03 - 0,04 \text{ \AA}$. Следовательно, межатомное расстояние в этих молекулах может быть представлено с достаточной точностью как сумма некоторых постоянных эффективных атомных радиусов.

Однако приведенные выше уравнения не позволяют определить численные значения эффективных атомных радиусов, поскольку число независимых уравнений на единицу меньше числа неизвестных. Поэтому для построения системы эффективных атомных радиусов всегда следует привлекать дополнительные предположения. Это приводит к необходимости при оценке межатомных расстояний в неизученных молекулах с помощью эффективных радиусов во многих случаях вводить тем или иным способом определенные поправки (например, типа общеизвестного уравнения Шо-

Разности межатомных расстояний в двухатомных молекулах галогенидов щелочных элементов

Элемент	F	$\Delta r_{Cl,F}$	Cl	$\Delta r_{Br,Cl}$	Br	$\Delta r_{J,Br}$	J	Средн.
Li		0,49		0,15		0,22		
$\Delta r_{Na,Li}$	0,31		0,34		0,33		0,32	0,33
Na		0,52		0,14		0,21		
$\Delta r_{K,Na}$	0,29		0,31		0,32		0,34	0,31
K		0,54		0,15		0,23		
$\Delta r_{Rb,K}$	0,12		0,12		0,12		0,13	0,12
Rb		0,54		0,16		0,23		
$\Delta r_{Rb,Cs}$	0,10		0,12		0,13		0,14	0,12
Cs		0,56		0,17		0,24		
Средн.		0,53		0,15		0,23		

макера — Стивенсона (¹⁶)). Достоинство рассмотренной выше закономерности для оценки межатомных расстояний в молекулах, для которых отсутствуют экспериментальные данные, заключается в том, что линейная зависимость межатомных расстояний в рядах сходных молекул осуществляется вне зависимости от того, можно ли ввести систему постоянных эффективных атомных радиусов так, чтобы межатомное расстояние равнялось их сумме в соответствующих молекулах. Однако возможности использования описанного сравнительного метода несколько ограничены тем обстоятельством, что для оценки межатомных расстояний в какой-либо молекуле необходимо знание межатомных расстояний для всех молекул одного ряда и межатомных расстояний для двух (а в разобранным частном случае — одного) членов ряда, к которому принадлежит рассматриваемая молекула.

Обсуждаемая закономерность касается межатомных расстояний в рядах сходных молекул. Но эта закономерность может иметь более широкое значение, если ввести представление о рядах связей различных типов (или подтипов), в которых также наблюдается линейное изменение межатомных расстояний.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Спиридонов, Канд. диссертация, Химфак МГУ, 1958. ² В. А. Наумов, Канд. диссертация, Химфак МГУ, 1959. ³ М. Х. Карапетьянц, Лин. Тин-чин, Журн. структурн. химии, 1, 277 (1960). ⁴ В. М. Татевский, ДАН, 101, 515 (1955). ⁵ A. Hopig, M. Mandel et al., Phys. Rev., 96, 629 (1954). ⁶ П. А. Акишин, В. П. Спиридонов, Кристаллография, 2, 475 (1957). ⁷ П. А. Акишин, В. А. Наумов, В. М. Татевский, Вестн. МГУ, сер. матем., астроном., физ., химич., № 1, 229 (1959). ⁸ Tables of Interatomic Distances and Configurations in Molecules and Ions, London, 1958. ⁹ Д. И. Менделеев, Основы химии, М.—Л., 1947. ¹⁰ В. А. Киреев, ЖФХ, 2, 233 (1931). ¹¹ В. А. Киреев, ЖПХ, 7, 1 (1934). ¹² М. Х. Карапетьянц, ЖФХ, 27, 934 (1953). ¹³ М. Х. Карапетьянц, ЖФХ, 29, 1132, 1328 (1955). ¹⁴ М. Х. Карапетьянц, ЖФХ, 30, 2218 (1956). ¹⁵ М. Х. Карапетьянц, ЖФХ, 32, 306 (1958). ¹⁶ V. Schoemaker, D. Stevenson, J. Am. Chem. Soc., 63, 37 (1941).

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Г. И. КУТЯНИН и К. Г. КАРИМОВ

**ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ИЗНОСОСТОЙКОСТЬЮ
И ТЕРМОСТОЙКОСТЬЮ КОЖИ**

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 18 I 1961)

Наиболее подробно изнашивание и износостойкость подошвенных кож рассмотрены в работах (1-4). Одним из авторов данной статьи была предложена теория, связывающая износостойкость подошвенных кож с показателем их термостойкости, а именно, с температурой их сваривания (3, 5). Тем самым были указаны пути повышения их износостойкости и предложен легко определяемый показатель (температура сваривания), по изменению которого можно судить об изменении износостойкости кожи.

Температура сваривания кожи является температурной константой, аналогичной, с одной стороны, температуре плавления кристаллических веществ, а с другой, — температуре размягчения (или стеклования T_g) аморфных полимеров (3). Как показано в работах (3, 6, 7), величина температуры сваривания является важным и удобным показателем, характеризующим интенсивность межмолекулярного скрепления структуры волокнистого белкового вещества кожи — коллагена.

Предложенный показатель был успешно использован в ряде экспериментальных работ (4, 8, 9), результаты которых подтверждают теорию износостойкости. Однако до сего времени отсутствовали экспериментальные данные о соотношении между износостойкостью и температурой сваривания образцов кожи, выработанных из одного и того же вида полуфабриката (голья), с исключением топографических различий макроструктуры кожи и с применением для дубления различных видов дубящих веществ. С целью восполнить этот пробел нами были поставлены специальные опыты, результаты которых излагаются ниже.

Для опытов был взят прозолненный и нейтрализованный подошвенный полуфабрикат (голье), центральный участок которого был разрезан на ряд образцов. Образцы были распределены по принципу асимметрической бахромы (для исключения влияния топографических различий макроструктуры кожи) на ряд сравнимых параллельных групп по 8 образцов в каждой. Часть групп образцов исследовалась в недубленном состоянии, а остальные — после дубления. Дубление каждым из взятых дубителей (см. табл. 1) производилось отдельно по обычно принятым методикам, обеспечивающим полное и равномерное продубливание кожи.

Выдубленные образцы промывались водой и высушивались, а затем в обводненном состоянии испытывались на износостойкость и температуру сваривания. Одновременно производился анализ химического состава образцов каждой группы. Температура сваривания определялась стандартным методом. Износостойкость оценивалась по стойкости к истиранию на приборе Московского института народного хозяйства им. Плеханова (конструкции В. Н. Феоктистова и Г. А. Валякина). Истирание образцов на этом приборе приближается по своим условиям к истиранию кожаной подошвы обуви. Достоинством его является также возможность одновременного истирания всей группы образцов, закрепляемых на ободе колеса,

Зависимость между стойкостью к истиранию и температурой сваривания подошвенных кож (в обводненном состоянии)

Вид дубления	Стойкость к истиранию C				Повышение стойкости к истиранию при дублении ΔC в циклах на 1 мм толщины кожи	Т-ра сваривания T св, °C	Повышение т-ры сваривания, °C	$\frac{\Delta C}{\Delta T}$ св при расчете на 1 мм тол.
	на 1 мм тол-щины кожи		на всю толщину кожи					
	в циклах при-бора	в %	в циклах при-бора	в %				
Без дубления (исход-ный полуфабрикат—голье)	270	100	1351	100	—	65,5	—	-
Дубление таннидами дубового экстракта	588	218	3335	247	318	78,3	12,8	24,8
Дубление таннидами ивового экстракта	656	243	3686	273	386	81,5	16,0	34,1
Формальдегидное дуб-ление	701	260	3360	249	431	88,5	23,0	18,7
Хромовое дубление	869	322	4528	335	599	95,5	30,0	20,0

перекатывающего с проскальзыванием по истирающей поверхности литых асфальтовых плит. Скорость качания составляла 5,5 м/мин, а скорость скольжения 1,3 м/мин. Колесу сообщалось переменное движение вперед и назад на длине 2,9 м, что составляло один цикл движения прибора. Давление на образцы при истирании соответствовало 15 кГ/см². На приборе истиралось 75—80% каждого образца (по толщине). Толщина образцов измерялась толщемером с точностью отсчета до 0,05 мм. При измерении толщины недубленого обводненного полуфабриката (голья) пружина толщемера снималась. Стойкость к истиранию выражена средним числом циклов движения прибора, необходимым для истирания 1 мм толщины всей толщины образца. В табл. 1 представлены средние данные (по каждой группе) стойкости образцов подошвенных кож к истиранию в зависимости от вида дубящего вещества и температуры сваривания образцов.

Данные табл. 1 свидетельствуют о резкой зависимости стойкости образцов подошвенной кожи к истиранию от вида дубления. Дубление таннидами (дубового и ивового экстрактов) более чем в 2 раза, а солями хрома — более чем в 3 раза повышает стойкость недубленого полуфабриката к истиранию (в мокром состоянии). Между величинами стойкости к истиранию и температуры сваривания кожи наблюдается прямая зависимость. Чем выше термостойкость образцов кожи, тем выше стойкость их к истиранию. Отношение повышения износостойкости к повышению температуры сваривания $\Delta C/\Delta T$ во всех случаях составляет весьма близкие величины.

Таким образом, полученные данные полностью подтверждают ранее предложенную теорию износостойкости^(3, 5), согласно которой изнашивание кожаной подошвы связано с разрывом межмолекулярных (межцепных) связей в структуре коллагена, а износостойкость подошвенных кож при всех прочих равных условиях является (до некоторого предела) прямой функцией интенсивности межмолекулярного скрепления их структуры.

Тесная связь между износостойкостью и термостойкостью кожи подтверждается также результатами опытов по выяснению влияния температуры гидротермического воздействия на износостойкость подошвенной кожи комбинированного хромово-таннидного дубления. Температура сваривания кожи равнялась 96°. Опытные образцы, подвергнутые в течение 15 мин воздействию воды при температуре в пределах от 20 до 100°, истирались нами одновременно с контрольными образцами, не подвергнутыми гидротермической обработке на том же приборе. Изменение относительной стойкости к истиранию образцов, подвергнутых указанным гидротермическим воздействиям (в процентах от стойкости к истиранию соответствующих

контрольных образцов), в зависимости от температуры гидротермической обработки показано на рис. 1.

Рассмотрение кривой рис. 1 показывает, что заметное понижение износостойкости кожи в условиях кратковременного (15 мин.) гидротермического воздействия начинается при температуре около 70° , а при 80° резко усиливается. При температуре 100° , вызывающей явное сваривание исследованной кожи, стойкость ее к истиранию понижается более чем в 3 раза. Очевидно, что разрушение ряда межцепных связей, скрепляющих элементы структуры коллагена и устойчивых к воздействию воды при обыкновенной температуре, начинается при достижении температуры около 70° и резко усиливается вблизи температуры сваривания кожи.

Закономерная зависимость между величинами износостойкости и термостойкости, установленная на образцах кожи, по-видимому, характерна и для некоторых других материалов, изнашивание которых имеет абразивный характер. Так, например, Боуден и Тейбор⁽¹⁰⁾ установили, что износостойкость ряда металлов растет с повышением температуры плавления.

Тесная связь показателей износостойкости и термостойкости кожи обусловлена тем, что величины обоих этих показателей однозначно зависят от интенсивности межмолекулярного (межцепного) скрепления структуры коллагена. С этим же связано установленное ранее⁽¹¹⁾ параллельное изменение температуры сваривания и упругих свойств кожи в процессе дубления. Таким образом, температура сваривания является важной характеристикой, связывающей термостойкость, упругие свойства и износостойкость кожи.

Авторы выражают глубокую благодарность акад. П. А. Ребиндеру за интерес к работе и ценные замечания.

Московский институт народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова

Поступило
15 VI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. В. Чернов, Учение о качестве кожи, 1939. ² Н. Д. Закатова, Н. Н. Черников, Об износе кожаной подошвы, 1950. ³ Г. И. Кутянин, Исследование физико-механических свойств кожи, 1956. ⁴ А. И. Метелкин, Н.-и. тр. Центр. н.-и. инст. кожбывн. пром., Сборн. 30, 1959, стр. 65. ⁵ Г. И. Кутянин, Легк. промыш., № 10, 25 (1949). ⁶ А. Н. Михайлов, Физико-химические основы технологии кожи, 1949. ⁷ П. А. Ребиндер, Легк. пром., № 2, 30 (1950). ⁸ В. Г. Сучков, Легк. пром., № 3 (1957). ⁹ П. И. Левенко, Химические и физико-механические показатели кожи и их значение для улучшения качества продукции, М., 1959. ¹⁰ Ф. П. Боуден, Д. Тейбор, Трение и смазка, 1960, стр. 57. ¹¹ Г. И. Кутянин, ДАН, 65, № 3, 299 (1949).

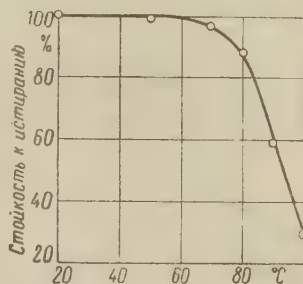


Рис. 1. Изменение стойкости подошвенной кожи к истиранию в зависимости от температуры гидротермического воздействия

В. И. ПРОСВИРИН и Л. Я. НЕСГОВОРОВ

КОРРОЗИОННОЕ РАЗРУШЕНИЕ НАГРЕТОГО ЖЕЛЕЗА В ПОТОКЕ ХОЛОДНОГО ВОЗДУХА БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ

(Представлено академиком А. А. Бочваром 4 I 1961)

Влияние скорости движения воздуха и других газов на коррозию нагретого металла было предметом ряда исследований (¹⁻⁶). Но до настоящего времени это явление рассматривалось как второстепенный фактор при решении проблем, связанных с окислением. В одних случаях это влияние было малозаметным, в других обнаруживались противоречивые результаты. Скорости движения газовых сред во всех этих исследованиях были незначительными (< 500 м/мин.). Исследования, связанные с коррозионным разрушением нагретых металлов в газовом потоке больших дозвуковых

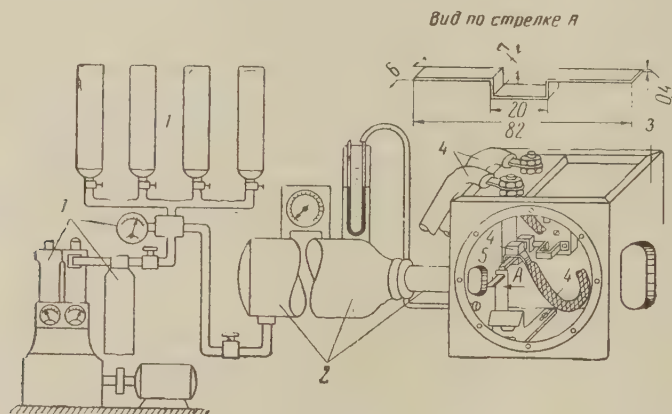


Рис. 1. Общий вид установки: 1 — компрессорная часть с рабочими баллонами, 2 — форкамера с рабочим соплом, 3 — рабочая часть аэродинамической трубы, 4 — элементы системы электронагрева, 5 — образец

сверхзвуковых скоростей, пока неизвестны. Исключение представляют газопыльные среды, запыленные абразивными частицами (зола, кварц и др.), где исследуют эрозионное или коррозионно-эрозионное разрушение металлов при больших дозвуковых скоростях движения (⁸).

В настоящем исследовании ставилась задача изучить взаимодействие нагретого железа с потоком холодного воздуха, характеризующееся коррозионно-эрозионным разрушением, при скоростях движения воздуха порядка нескольких десятков тысяч метров в минуту. Исследование проводилось на установке (рис. 1), которая состояла из сверхзвуковой аэродинамической трубы баллонного типа с закрытой рабочей частью и со свободной струей и системы электронагрева. Испытуемый образец, имеющий \square -образную форму, нагревался пропусканием электротока. Температура образца измерялась с точностью $\pm 10^\circ$ в исследуемом диапазоне 800 — 1000°. Скорость движения воздуха составила 0—0,3—0,8—1,5—1,7—2,1—3,1 числа М. Скорость воздуха при $M = 1$ составляет 298 м/сек.

Время воздействия потока воздуха изменялось от 10 до 120 сек. Определение общей убыли веса образца производилось путем удаления оставшейся на нем окалины специальным реактивом. Расчет скорости коррозионно-эрозионного разрушения относился не ко всему образцу, а к его элементу, который представлял собой диск диаметром 5 мм, высекавшийся калиброванным пуансоном из центральной части образца после его обдува. Угол атаки образца равнялся 0° . Общий результат разрушения образца на рабочем режиме определялся по 3—8 осредненным экспериментальным точкам.

Полученный результат, характеризующий скорость газовой коррозии при 800, 900 и 1000° в зависимости от скорости движения воздуха, показан на рис. 2. Для приближенной оценки влияния числа M потока на скорость

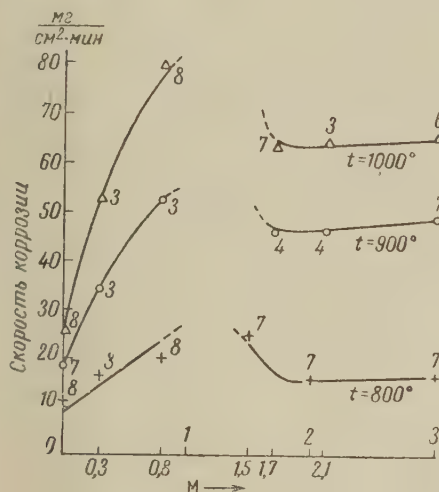


Рис. 2. Зависимость скорости коррозионного разрушения от скорости воздушного потока при различных температурах образца. Числа у точек — число осредненных экспериментальных точек. $\tau = 10$ сек.; $\alpha_{ат} = 0^\circ$

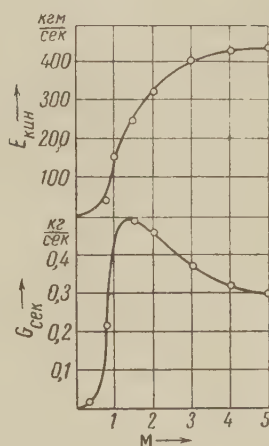


Рис. 3. Зависимость среднего весового расхода и осредненного потока кинетической энергии через единицу площади от скорости воздушного потока

разрушения железа были взяты следующие осредненные характеристики воздушного потока: средний весовой расход воздуха в рабочем сечении $G_{сек}$ (кг/сек) и средний поток кинетической энергии через единицу площади $E_{кин}$ (кгм/сек), которые подсчитывались соответствующим образом⁽⁷⁾. Они выбраны потому, что первая из них определяет скорость доставки кислородных атомов и, следовательно, возможную скорость окалинообразования; вторая же может, в некоторой степени, характеризовать молекулярно-абразивное изнашивание окисной пленки, поскольку силы трения в пограничном слое, при наличии теплообмена между образцом и воздушным потоком большой скорости, определить очень трудно. Изменение весового расхода и кинетической энергии по числу M воздушного потока представлено на рис. 3.

Из рассмотрения кривых на рис. 2 видно, что в интервале от $M = 0$ до $M = 0,8$ скорость разрушения возрастает, что соответствует возрастанию $G_{сек}$ и $E_{кин}$ в этом же интервале.

С повышением температуры нагрева влияние скорости потока на разрушение усиливается, что характеризуется увеличением угла наклона восходящих участков кривых в дозвуковой области.

Непосредственный переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым не исследовался ввиду отсутствия стационарного режима обтекания, резкого возрастания аэродинамических нагрузок и вибраций, вносящих боль-

шие искажения в эксперимент, и ввиду невозможности точного замера значений параметров воздушного потока. Необходимо учитывать, что при сверхзвуковых скоростях характер обтекания изменяется за счет появления впереди образца скачка уплотнения. Поэтому наблюдающееся уменьшение скорости разрушения образца при переходе от чисел $M = 0,8$ до чисел $M = 1,7 - 1,8$ может быть вызвано уменьшением весового расхода воздуха при $M > 1$ (рис. 3) и уменьшением кинетической энергии за скачком. Несмотря на то что общий запас кинетической энергии потока при числах $M > 1$ продолжает расти, доля кинетической энергии, воздействующей на образец, уменьшается, вследствие больших ее потерь на скачке уплотнения. При дальнейшем увеличении скорости потока ($M \geq 2$) доля кинетической энергии, воздействующей на образец, будет возрастать; она может компенсировать в этом случае продолжающееся уменьшение весового расхода. Поэтому суммарное действие этих факторов может привести к некоторому увеличению скорости разрушения, что и наблюдается при увеличении скорости потока свыше $M = 2$.

Усиливающее действие скорости потока на разрушение с повышением температуры здесь выражено слабее, чем в дозвуковой области.

Увеличение времени выдержки вызывает уменьшение скорости разрушения на всех исследуемых числах M . При малых выдержках процесс разрушения идет с большей скоростью, чем при более длительных выдержках. Это говорит о том, что в целом процесс разрушения носит коррозионный характер. С увеличением времени окисления происходит утолщение окалины, а следовательно, и увеличение времени диффузии реагентов через окалину. Поскольку диффузия через окалину является наиболее медленным актом, происходит торможение всего процесса окисления в целом.

Поступило
3 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Уч. зап. Ленингр. унив. им. А. А. Жданова, Скорость окалинообразования на металлах и сплавах, 1954. ² Н. Д. Томашов, Теория коррозии и защита металлов. Изд. АН СССР, 1959. ³ D. Murphy, W. Wood, W. Jominy, Trans. Am. Soc. Steel Treat., 19, 193 (1931). ⁴ W. Baukloh, O. Reif, Metallwirtschaft, 14, 1055 (1935). ⁵ R. Bourgggraff, Stahl und Eisen, 60, 129, 156 (1940). ⁶ W. Schroe der, Arch. Eisenhüttenwesen, 6, 47 (1932). ⁷ Р. Пэнкхерст, Д. Ходлер, Техника эксперимента в аэродинамических трубах, ИЛ, 1955. ⁸ В. И. Просвирина, А. И. Федосов, Инж. физ. журн., 2, № 1 (1959).

Л. М. ВАРЮХИНА

СПОРЫ И ПЫЛЬЦА ТРИАСОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ЮГА ПЕЧОРСКОГО БАССЕЙНА

(Представлено академиком Д. В. Наливкиным 14 XI 1960)

Еще в 1957 г. верхняя часть разреза перми, выделяемая В. И. Чалышевым⁽⁵⁾ в залазнинскую свиту, была отнесена нами⁽¹⁾ к триасовой системе. Более детальное изучение комплексов спор и пыльцы Средней Печоры и находка флоры в залазнинской свите уже в 1959 г. позволили нам⁽⁷⁾ уточнить возраст залазнинской свиты как верхний триас (нижний и средний кейпер, по М. Ф. Нейбург⁽⁶⁾) и выделить нижнетриасовые отложения в объеме переборской свиты, ранее относившейся к татарскому ярусу. Новые определения спор и пыльцы, произведенные в 1959—1960 гг., полностью подтвердили выделение нижнего и верхнего триаса (последнего в объеме нижнего и среднего кейпера) и позволили обосновать выделение верхнего кейпера или рэта.

Исходным материалом для палинологического анализа триаса послужили образцы, отобранные в 1955—1959 гг. В. И. Чалышевым из триасовых отложений рр. Перебора, Залазной, М. Аранца, Б. Сыни и др. Споры и пыльца оказались не во всех образцах. Из 131 просмотренного образца полные комплексы спор и пыльцы, т. е. комплексы, содержащие 150—250 форм, удалось набрать лишь из 66 образцов. Особенно редко споры и пыльца встречаются в отложениях нижнего триаса — комплексы набраны в 6 образцах из 52. Такая слабая насыщенность спорами и пылью нижнего триаса стоит в прямой зависимости от литологических особенностей его — здесь большое место занимают песчаники и конгломераты.

«Нижнетриасовые отложения, именуемые переборской свитой, на юге Печорского бассейна представлены в основном красноцветными отложениями: конгломератами и грубыми песчаниками с прослоями красных глин. Лишь на рр. М. Аранце и Б. Сыне среди красноцветов появляются сероцветные отложения, представляющие собой, по В. И. Чалышеву⁽⁷⁾, «западные фации» переборской свиты.

Спорово-пыльцевые комплексы нижнего триаса характеризуются наличием большого количества спор хвощевых (10—12%), относящихся к классу Equisetales, среди которых наиболее распространены *Leiotriletes rotundus* Naum., *Euryzonotriletes microdiscus* К.-М. Достаточно много также спор класса *Calamariales* (8—9%). В меньшем количестве встречаются микроспоры папоротников из родов *Osmunda* (0,5—1,5%), *Matonia* (0,5—2,0%).

Среди пыльцы в нижнетриасовых комплексах отмечается большое количество хвойных прототипов *Podocarpacea*, *Pinacea*. Большое участие в комплексах принимают мелкие округлые формы *Azonaletes* — *Asaccites* (до 14%) с плотной неясно шагреневой или гладкой экзиной. Довольно много (16%) в нижнетриасовых комплексах пыльцы гинкгообразных мезозойского типа с гладкой и шероховатой экзиной. Встречается, но в небольших количествах (0,5—2,0%) хвойная пыльца *Striatopinites*.

В руководящем комплексе спор и пыльцы нижнего триаса, помимо перечисленных форм, постоянно присутствуют в небольших количествах

споры *Partina bulbifera* Mal., *Partina reticulata* Mal., пыльца *Caytoniales* *Podozamites*. Представители класса *Cordaitea* единичны.

На отложениях переборской свиты, по мнению В. И. Чалышева (7) несогласно, залегает залазининская свита, представленная мощной толщей ритмично чередующихся сероцветных пород, таких как песчаники, алевролиты и глины с тонкими и редкими прослойками углей и углистых сланцев. Видовой состав спорово-пыльцевых комплексов этой свиты более разнообразен по сравнению с нижележащими отложениями. Здесь хорошо выделяются две группы комплексов: 1) группа ниже-среднекейперских комплексов; 2) группа рэтских (верхнекейперских) комплексов.

Ниже-среднекейперские комплексы характеризуются наличием большого количества видов, распространенных как в ниже-, так и в верхнетриасовых отложениях. Только различия в процентном соотношении тех или иных систематических групп в комплексах и появление ряда новых верхнетриасовых видов позволяют отличать ниже-среднекейперские спорово-пыльцевые комплексы от комплексов спор и пыльцы нижнего триаса.

Отличия между нижнетриасовыми и ниже-среднекейперскими комплексами сводятся к уменьшению вверх по разрезу микроспор *Azonaletes*—*Asaccites* (до 6%), наиболее обильно представленных в комплексах нижнего триаса (до 14%), к увеличению пыльцы древних *Coniferales* (10%) и мелкой пыльцы класса *Caytoniales* (5%). Одновременно в комплексах нижнего и среднего кейпера уменьшается количество округлых гладких спор *Leiotriletes rotundus* Naum.

Рэтские спорово-пыльцевые комплексы обнаружены в образцах из обнажения с р. Малого Аранда из самых верхов залазининской свиты. Литологически рэтские отложения представлены в нижней части песчаником, выше которого идут серые глины, чередующиеся с серыми песчаниками и алевролитами, содержащие в верхней части три маломощных прослоя угля. Спорово-пыльцевые комплексы изучены из глин и углей. В песчаниках и алевролитах они отсутствуют.

Комплекс спор и пыльцы рэта характеризуется следующим составом *: *Equisetum* sp. 0,8%, *Lycopodium subrotundum* K.-M. 1,2%, *Lycopodium* sp. 0,8%, *Selaginella* sp. 0,8%, *Cyathea* 0,8%, *Coniopteris* ex gr. *jurassica* Bolch. 0,8%, *Coniopteris* sp. 2,8%, *Polypodiaceae* 0,8%, *Matonia triassica* K.-M. 1,6%, *Matonia* sp. 1,2%, *Gleichenia* sp. 1,6%, *Schizaea* 3,2%, *Osmunda* sp. 0,8%, *Leiotriletes rotundiformis* (Mal.) Bolch. 1,6%, *L. microdiscus* K. K.-M. 1,2%, *L. marginopinuatus* K.-M. 0,8%, *L. glaber* Naum. 0,8%, *Campotriletes triassicus* K.-M. 1,6%, *Exinella magnotuberculata* var. *compacta* Mal. 0,8%, *Azonotriletes amplexus* Waltz var. *triassus* K.-M. 1,2%, *Cordaitea* sp. 0,4%, *Walchites gradatus* Bolch. 0,4%, *Pseudowalchia* sp. 1,2%, *Brachytriletes* sp. 1,6%, *Bennettiales* ex gr. *labrosus* Bolch. 0,8%, *Bennettiales* sp. 3,2%, *Cycadaceae* 2,4%, *Ginkgo parva* (Naum.) Bolch. 1,2%, *G. elliptica* (Naum.) comb. n. 0,8%, *Ginkgo* sp. 2,4%, *Caytoniales* 4,8%, *Podocarpus* sp. 0,8%, *Haplosacculina alata* (Lub.) var. *triassica* Mal. 0,4%, *Platysaccus gracilis* K.-M. (типа *Podocarpaceae*) 0,8%, *Protopodocarpus* ex gr. *sulphureus* Bolch. 0,8%, *Araucaria* sp. 2,8%, *Agathis* sp. 0,8%, *Podozamites sinuosus* Bolch. 0,8%, *P.* ex gr. *larizinus* (Naum.) Bolch. 0,4%, *Podozamites* sp. 3,2%, *Pinaceae* 1,2%, *Picea mesophitica* Pokr. 0,8%, *P.* ex gr. *exiloides* Bolch. 0,8%, *Picea* sp. 5,2%, *Paleopicea glaesaria* Bolch. 1,2%, *P. spirellaeformis* (Mal.) Bolch. 0,8%, *Protopiceae vilujensis* Bolch. 0,8%, *Protopiceae* sp. 0,8%, *Cedrus* sr. 0,8%, *Pinus* подрод *Haploxylon* 1,6%, *P.* подрод *Diploxylon* 1,6%, *P. aff. pinaster* Sol. 1,2%, *P. aff. pernobilis* Bolch. 0,8%, *Piceites prolixus* (Lub.) Sauer 0,8%, *Protopinus latebrosa* Bolch. 1,2%, *P. sublutens* Bolch. 1,2%, *Sacculina prolongata* var. *minor* Mal. 1,2%, *Pseudopinus textilis* Bolch. 0,8%, *P. contigna* Bolch. 0,8%, *Paleoconiferus asaccatus* Bolch. 2,0%, *Paleoconiferus* sp. 5,6%, *Protoconiferus* sp. 1,6%, *Azonaletes*—

* Цифры — средние из семи полных комплексов.

Asaccites 4,8%, *Azonialetes* sp. 5,6%, *Aggerella bullulinaeformis* Mal. 1,2%, не определенная пыльца 1,6%.

Как видно из приведенного комплекса, среди спор преобладают споры папоротников из сем. *Cyatheaceae* (4,4%), представленных родом *Coniopteris*, который характерен для юрских отложений. Для рэтских комплексов характерно также присутствие спор сем. *Matoniaceae*, представленных видами *Matonia triassica* К.-М., *Matonia* sp., известных из нижнего и среднего кейпера. Наряду с ними присутствуют споры папоротникообразных неустановленного систематического положения, относящиеся к подгруппе *Leiotriletes* Naum. В меньшем количестве встречены споры хвощевых рода *Equisetales*, преимущественно представленных видами *Leiotriletes microdiscus* К.-М., *L. rotundus* Naum., и споры рода *Osmunda*.

Среди пыльцы в рэтском комплексе доминирующее положение занимает пыльца невыясненной систематической принадлежности и пыльца голосемянных. Среди последних особенно большое количество пыльцы хвойных (43,6%), представленных в основном сем. *Pinaceae*. В этом комплексе немало также пыльцы саговых или гинкговых, имеющих коричневатую шероховатую экзину, содержание которых достигает 7%. Пыльца кордаитов единична. Характерным для спорово-пыльцевых комплексов рэтских отложений является большое содержание в них пыльцы древних хвойных, среди которых появляется примитивная пыльца, относящаяся нами к *Paleosconiferus*. Особенностью этих примитивных форм является небольшой размер воздушных мешков и волнистая линия их прикрепления, а также неясный характер скульптуры экзины. Этот тип пыльцы в нижележащих отложениях почти не встречался. Значительный процент в комплексах составляет сем. *Araucariaceae* (8%), представленное в основном пыльцой из рода *Podozamites*.

При сопоставлении рэтских спорово-пыльцевых комплексов с комплексами спор и пыльцы нижележащих отложений нижнего и среднего кейпера выявляются следующие особенности этих спектров. Процентное содержание папоротников сем. *Cyatheaceae*, незначительное (1,0—1,5%) в комплексах нижнего и среднего кейпера, в рэтских комплексах повышается до 4,4%. Также ведут себя и споры из сем. *Schisae*, увеличивающиеся в рэте до 3,2%. Содержание же спор родов *Lycopodium*, *Osmunda* в рэте уменьшается, соответственно, до 2,0 и 0,8%.

Пыльца голосемянных, как правило, во всех изученных рэтских комплексах доминирует над спорами, причем пыльца древних хвойных в рэтских комплексах находится в заметно большем количестве, чем в нижележащих отложениях. Содержание пыльцы *Bennettitales* несколько повышается в комплексах рэта по сравнению с комплексами нижнего и среднего кейпера.

Еще одним отличием рэтских спорово-пыльцевых комплексов является наличие в них характерных юрских форм, таких как: *Coniopteris* sp., *Lycopodium subrotundum* К.-М., *Brachytriletrium* sp., *Podozamites sinuosus* Bolch. *Picea mesophitica* Pokr., *Protopicea vilujensis* Bolch. *Paleopicea spirellaeformis* (Mal.) Bolch., *P. glaesaria* Bolch., *Protopinus sublutens* Bolch., *P. latebrosa* Bolch., *Pseudopinus textilis* Bolch., *P. contigna* Bolch., отсутствующих в нижнем и среднем кейпере.

Как видно из приведенных сопоставлений, палинологический комплекс рэтских отложений весьма своеобразен и достаточно хорошо отличается от спектров нижнего и среднего кейпера, причем отличия в комплексах спор и пыльцы рэта от нижнего и среднего кейпера более существенны, чем таковые же отличия между нижним триасом и кейпером. Подобную закономерность отмечает и В. С. Малявкина^(3,4) для спорово-пыльцевых комплексов триасовых отложений Восточного и Западного Приуралья.

Общими признаками спорово-пыльцевых комплексов ниже-среднекейперских и рэтских отложений являются:

1. Наличие большого количества в обеих группах комплексов пыльцы

хвойных растений и спор папоротников. среди которых имеется ряд общих видов, в известной мере определяющих верхний триас, таких как: *Matonia triassica* K.-M., *Lycopodium* sp., *Azonotriletes amplexus* Waltz var. *triassus* K.-M., *Sacculina prolongata* var. *minor* Mal., *Paleoconiferus asaccatus* Bolch. *Piceites proluxus* (Lub.) Sauer.

2. Постоянное присутствие папоротникообразных, относящихся к подгруппе *Leiotriletes* Naum.

3. Заметное участие мелкой пыльцы кейтониевых.

4. Присутствие единичной пермской пыльцы кордаитов.

5. Обязательное присутствие гинкговых и цикадовых мезозойского облика с гладкой структурой экзины.

Таким образом, разобранный нами рэтский комплекс спор и пыльцы, имея ряд общих черт с комплексами спор и пыльцы нижнего и среднего кейпера, уже сильно обогащен юрскими формами и имеет переходный характер между триасом и юрой, что находится в полном соответствии с таким же смешанным составом листовой флоры рэта (2).

Институт геологии
Коми филиала Академии наук СССР

Поступило
1 X 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. М. В а р ю х и н а, Тр. Коми фил. АН СССР, № 7, 1959. ² А. Н. К р и ш-
т о ф о в и ч, Курс палеоботаники, 1933. ³ В. С. М а л я в к и н а, Тр. Всесоюзн. на-
учно-иссл. геол.-разв. нефт. инст., нов. сер. в. 7 (1953). ⁴ В. С. М а л я в к и н а, Тр.
Всесоюзн. совещ. по разработке униф. схемы стратигр. мезозойск. отл. Русской платформы.
1956. ⁵ М. Ф. Н е й б у р г, ДАН, 127, № 3 (1959). ⁶ В. И. Ч а л ы ш е в, Тр. Коми
фил. АН СССР, № 7, 1959. ⁷ В. И. Ч а л ы ш е в, Л. М. В а р ю х и н а, Сборн. ста-
тей по геологии Арктики, № 4, 1960.

Р. З. ГЕНКИНА

**МЕЗОЗОЙСКАЯ ФЛОРА ЮЖНО-ЯКУТСКОГО (АЛДАНСКОГО)
КАМЕННОУГОЛЬНОГО БАССЕЙНА И ЕЕ СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ
РАСПРОСТРАНЕНИЕ**

(Представлено академиком Д. И. Щербаковым 2 VIII 1960)

По южной окраине обширного Алданского нагорья, от р. Олекмы на западе до р. Учюра на востоке, по широте свыше 600 км простирается Южно-Якутский (Алданский) каменноугольный бассейн мезозойского возраста.

Весь угленосный бассейн с запада на восток делится на четыре угленосных района: Усмунский, Алдано-Чульманский, Гонамский и Токинский. В геологическом строении бассейна принимают участие многокилометровые толщи докембрийских и нижнекембрийских образований, выступающие в краевых частях бассейна и слагающие его фундамент и мезозойские континентальные осадки, выполняющие впадину бассейна.

Континентальные осадки бассейна достигают 2500 м мощности и представляют собой угленосные отложения, так как углепроявления встречаются по всей толще. Разрез угленосных отложений сложен конгломератами, различными песчаниками, алевролитами, аргиллитами и пластами каменного угля. Возраст подавляющей части угленосного разреза юрский. В последнее время в бассейне выделяются нижнемеловые отложения, однако площадное их распространение изучено еще слабо.

Залегают мезозойские породы в тектонических депрессиях, вытянутых в виде полос в северо-западном направлении, ограниченных с юга, а иногда и с севера линиями нарушений.

Стратиграфическое расчленение угленосного мезозойского комплекса бассейна затруднено вследствие однообразия литологии разреза, быстрой его фациальной изменчивости, отсутствия маркирующих горизонтов, скудности фаунистических остатков и недостаточной изученности флористических остатков. Последние встречаются часто почти по всему разрезу.

Наиболее характерными членами стратиграфического разреза угленосных отложений бассейна являются угольные пласты, по которым обычно ведется увязка отдельных разрезов.

По данным И. С. Бредихина ⁽¹⁾, в мезозойском угленосном комплексе Алданского бассейна выделяются пять свит, залегающих между собой согласно:

1. Юхтинская свита нижнеюрского возраста, мощностью 250—300 м, представленная так называемыми «крапчатыми» песчаниками, преимущественно кварцевого состава с вкраплениями желтовато-бурых охр.

2. Дурайская свита среднеюрского возраста, мощностью 250—400 м, характеризующаяся аркозовым составом песчаников, хорошей сортировкой обломочного материала, тонкозернистостью и углистостью пород и промышленной угленосностью.

3. Горкитская свита верхнеюрского возраста, мощностью 800—1200 м *, сложенная преимущественно мелкозернистыми, а в верхних горизонтах —

* Мощность горкитской свиты взята по полевым наблюдениям угольного отряда, 1959 г.

среднезернистыми и крупнозернистыми аркозовыми и полимиктовыми песчаниками с подчиненными прослоями тонкозернистых пород и промышленными пластами угля.

4. Холодниканская свита нижнемелового возраста, мощностью 400—450 м, отличающаяся от нижележащих угленосных свит погрубением обломочного материала и полимиктовым составом пород. Характер угленосности свиты еще мало изучен.

5. Ундытканская свита нижнемелового возраста, мощностью более 400 м; представленная песчано-конгломератовой толщей с мощной пачкой полимиктовых конгломератов в основании. Свита имеет ограниченное распространение в южных краевых частях бассейна.

Для всего разреза угленосных отложений бассейна и отдельных свит характерен более грубозернистый состав пород, отсутствие или незначительная угленосность в низах разреза и более тонкозернистый комплекс пород и наличие угольных пластов в верхней части его.

В 1959 г. автор принимал участие в полевых работах угольного отряда лаборатории петрологии углей, проводившего работы в Алдано-Чульмаканском, Кабактинском, Налдинском и Якокитском.

В результате изучения разреза угленосных отложений указанных месторождений автором совместно с В. К. Прянишниковым по многочисленным кернам скважин был собран значительный палеоботанический материал, который дает новые сведения о юрской и нижнемеловой флоре Южно-Якутского каменноугольного бассейна.

Определения растительных остатков из Южно-Якутского бассейна проводились в разные годы А. Н. Криштофовичем, В. Д. Принада, А. В. Аксариным, В. А. Вахрамеевым, З. П. Просвиряковой. Однако полученный нами материал выгодно отличается своей значительной полнотой и точной привязкой к стратиграфическому разрезу.

Послойные сборы и детальное изучение флоры, строго привязанной к стратиграфическому разрезу, позволило проследить изменение состава растительности в разрезе и выявить характерные комплексы для отдельных частей (свит) разреза.

В отложениях юхтинской свиты определимых растительных остатков почти найдено не было. Возможно, это зависит в большей степени от того, что нами было просмотрено ограниченное число скважин, вскрывших эту часть угленосного разреза.

В отложениях дурайской свиты, вскрытой скважинами на Чульмаканском и Кабактинском (скважина № 20) месторождениях были встречены многочисленные растительные остатки, представленные значительным числом видов и количеством экземпляров: *Equisetites asiaticus* Pryn., *Coniopteris burejensis* (Zal.) Sew., *C. aff. burejensis* (Zal.) Sew., *Coniopteris* sp., *Cladophlebis haiburnensis* (L. et H.) Brongn., *C. denticulata* (Brongn.) Font., *C. whitbiensis* Brongn., *C. aff. lobifolia* (Phillips), *Cladophlebis czulmakanensis* sp. n., *Raphaelia diamensis* Sew. (редко!), *R. duraica* sp. n., *Sphenobaiera longifolia* (Heer) Florin, *Czekanowskia rigida* Heer, *Phoenicopsis angustifolia* Heer, *Stenorachis scanica* Nath., *Carpolithes cinctus* Nath. Характерными формами дурайской свиты являются *Coniopteris burejensis* (Zal.) Sew., *Cladophlebis czulmakanensis* sp. n., *Raphaelia duraica* sp. n., *Stenorachis scanica* Nath.

Наиболее полно охарактеризована растительными остатками горкитская свита. Эта часть разреза вскрыта многочисленными скважинами на Чульмаканском (низы разреза), Нерюнгринском, Кабактинском, Налдинском и Якокитском месторождениях. Здесь были определены: *Equisetites asiaticus* Pryn., *E. sp. cf. Beani* Bunb., *Gonatosorus* (*Cladophlebis*) *ketovae* Vachr. (редко!), *Coniopteris burejensis* (Zal.) Sew., *C. hymenophylloides* (Brongn.) Sew., *C. nympharum* (Heer) Vachr. (редко!), *Cladophlebis aldanensis* Vachr., *C. argutula* (Heer) Font., *C. serrulata* Sam., *C. haiburnensis* (L. et H.) Brongn.

C. denticulata (Brongn.) Font., *C. whitbiensis* Brongn., *C. delicatula* Jabe et Oishi, *C. aff. lobifolia* (Phillips), *Raphaelia diamensis* Sew., *R. stricta* Vachr., *R. aff. prinadii* Vachr., *Sphenopteris* sp., *Ctenis aff. burejensis* Pryn., *Ctenis* sp., *Ginkgo lepida* Heer, *Ginkgo* sp., *Sphenobaiera longifolia* (Heer) Florin, *S. angustiloba* (Heer) Florin, *Czekanowskia rigida* Heer, *Phoenicopsis angustifolia* Heer, *P. speciosa* Heer, *Pagiophyllum* sp., *Podozamites lanceolatus* L. et H., *Pityophyllum Nordenskioldii* (Heer) Nath., *Elatides aff. curvifolia* (Dunk.) Nath., *Elatides* sp., *Pityospermum aff. gracile* Tur.-Ket., *Artrotaxopsis grandis* Font., *Pityocladus aff. kobukensis* Sew., *Elatocladus heterophylla* Halle, *Schizolepidium* sp., *Carpolithes cinctus* Nath., *Leptostrobus laxiflora* Heer, *Ixostrobus Heeri* Pryn., *Radicites* sp.

Особенно характерными для горкитской свиты являются: *Cladophlebis aldanensis* Vachr., *C. argutula* (Heer) Font., *C. serrulata* Sam., *C. delicatula* Jabe et Oishi, *Raphaelia diamensis* Sew. (много), *R. stricta* Vachr., *R. aff. prinadii* Vachr. и многочисленные разнообразные остатки растений неопределенного систематического положения, проявившиеся в виде репродуктивных органов.

Необходимо отметить особенное преобладание в горкитской свите видов рода *Raphaelia*, особенно *Raphaelia diamensis* Sew., в единичных экземплярах, впрочем, встречающегося и в дурайской свите, но в другом соотношении растительных форм.

В отложениях холодниканской свиты, достоверно выделенной в настоящее время только на Нерюнгринском месторождении, были определены следующие виды *Equisetites asiaticus* Pryn., *Gonatosorus* (*Cladophlebis*) *ketovae* Vachr., *Coniopteris aff. nympharum* (Heer) Vachr., *Cladophlebis aff. sangarensis* Vachr., *C. haiburnensis* (L. et H.) Brongn. *C. denticulata* (Brongn.) Font., *C. whitbiensis* Brongn., *C. pseudolobifolia* Vachr., *Ctenis nerungrensis* sp. n., *C. aff. burejensis* Pryn., *C. aff. yokoyamai* Kr. et Pr., *Ctenis* sp., *Nilssonina aff. gigantea* Kr. et Pr., *N. aff. acutiloba* (Heer) Pryn., *Pterophyllum burejense* Pryn., *Tyrmiopsis tyrmensis* Pryn., *Ginkgo lepida* Heer, *Czekanowskia rigida* Heer, *Phoenicopsis angustifolia* Heer, *Pityophyllum Nordenskioldii* (Heer) Nath., *Elatides aff. curvifolia* (Dunk.) Nath., *Pityolepis* sp. Наиболее характерными для холодниканской свиты являются цикадофиты: *Ctenis nerungrensis* sp. n., *C. burejensis* Pryn., *C. aff. yokoyamai* Kr. et Pr., *Nilssonina aff. gigantea* Kr. et Pr., *N. aff. acutiloba* (Heer) Pryn., *Pterophyllum burejense* Pryn., *Tyrmiopsis tyrmensis* Pryn. в сообществе с *Cladophlebis aff. sangarensis* Vachr., *Gonatosorus* (*Cladophlebis*) *ketovae* Vachr., *Coniopteris aff. nympharum* (Heer.) Vachr. Последние два вида в единичных экземплярах встречаются и в горкитской свите.

Отдельные части угленосного разреза характеризуются определенным комплексом растительных форм, в котором отдельные группы растений имеют неодинаковое значение.

Возраст отдельных комплексов ископаемой флоры определяется по сопоставлению с другими близкими флорами. Комплекс растений дурайской свиты можно отнести к средней юре. Он обнаруживает наибольшее сходство со среднеюрскими флорами Сибирской палеофлористической области (верхняя непродуктивная свита Иркутского бассейна, бородинская свита Канского бассейна) ⁽³⁾. Кроме того, в отложениях дурайской свиты встречена фауна пелеципод, представленная несколькими видами рода *Ferganoposchia*, свидетельствующая по мнению Г. Г. Мартинсона ⁽⁴⁾ о среднеюрском возрасте вмещающих ее толщ.

Комплекс ископаемых растений горкитской свиты может быть датирован верхней юрой. По сравнению с комплексом дурайской свиты он отличается более молодым обликом и обнаруживает наибольшее сходство с верхнеюрскими флорами джаской и сытогинской свит низовьев р. Алдана ⁽⁵⁾. Как на некоторое отличие от последних необходимо указать на появление в верхах разреза горкитской свиты единичных экземпляров таких растительных форм, как *Gonatosorus* (*Cladophlebis*) *ketovae* Vachr.

Coniopteris aff. *nympharum* (Heer) Vachr., *Ctenis* aff. *burejensis* Прун. являющихся уже обычными компонентами холодниканской свиты.

Комплекс растений холодниканской свиты может быть отнесен к низам неосома — гличается он от комплекса растений горкитской свиты расцветом группы цикадофитов, составляющих основное ядро комплекса. Благодаря которому последний отчетливо выражен. Кроме того, большой удельный вес в комплексе холодниканской свиты приобретают характерные нижнемеловые формы Сибирской палеофлористической области, такие как *Gonatosorus* (*Cladophlebis*) *ketovae* Vachr., *Coniopteris* aff. *nympharum* (Heer) Vachr., *Cladophlebis* *pseudolobifolia* Vachr. Комплекс растений холодниканской свиты обнаруживает близкое сходство с нижнемеловыми флорами батылхской и низами эксеняхской свит нижнего течения р. Алдана⁵), а также с нижнемеловыми флорами Буреинского бассейна, в котором, однако, цикадофиты представлены более богато.

Комплекс ископаемых растений холодниканской свиты при дальнейших исследованиях будет, по-видимому, пополнен, когда отложения свиты будут установлены и в других районах бассейна.

Институт геологии и разработки горючих ископаемых
Академии наук СССР

Поступило
29 VII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. С. Б р е д и х и н, Южно-Якутский (Алданский) каменноугольный бассейн, М., 1959.
² Н. Д. В а с и л е в с к а я, Тр. Междуведомств. совещ. по стратиграфии Сибири, М., 1957. ³ В. А. В а х р а м е е в, Тр. Междуведомств. совещ. по стратиграфии Сибири, М., 1957. ⁴ Т. А. И ш и н а, Тр. Междуведомств. совещ. по стратиграфии Сибири, М., 1957. ⁵ В. А. С а м ы л и н а, Мезозойская флора нижнего течения р. Алдана, Автореф. канд. диссертации, Л., 1957.

И. С. КРАСИВСКАЯ

О СООТНОШЕНИИ СИЛУРИЙСКИХ И ПОДСТИЛАЮЩИХ ИХ ОТЛОЖЕНИЙ НА СЕВЕРНОМ КАВКАЗЕ

(Представлено академиком Д. И. Щербаковым 29 XI 1960)

Фаунистически охарактеризованные силурийские отложения на Северном Кавказе известны лишь в одном районе — в бассейне среднего течения р. Малки. Здесь, близ притоков Малки Уллу- и Чегет-Лахран, еще в 1915 г. П. А. Герасимовым ⁽¹⁾ была найдена фауна верхних горизонтов силура. Более древние органические остатки на Северном Кавказе до настоящего времени известны только в двух местах — остатки трилобитов и брахиопод среднего кембрия в изолированной глыбе известняка по р. Чегет-Лахран, найденной А. П. Герасимовым, и проблематичные археоциаты плохой сохранности в известняках хр. Дженту ⁽²⁾, подлинность которых ныне ставится под сомнение. В связи с этим выяснение взаимоотношения силура с более древними немymi свитами имеет принципиальное значение для геологии Северного Кавказа.

До последнего времени все исследователи палеозоя Северного Кавказа вслед за А. П. Герасимовым ^(2, 3) считали, что силурийские отложения в долине Малки граничат с развитыми южнее метаморфическими сланцами по надвигу. Отсутствие данных о стратиграфических соотношениях силура и сланцев давало возможность произвольно толковать возраст последних и относить их даже к девону ⁽⁴⁾. Наши данные, полученные в 1957 — 1958 и 1960 гг., позволяют по-новому трактовать соотношение этих толщ.

Силурийские отложения бассейна Малки и упомянутые метаморфические породы слагают участки фундамента северного склона Главного хребта, вскрывающиеся из-под покрова юрских отложений в нижних частях глубоко врезанных долин Малки и ее левого притока Хасаута. Один выход силура (рис. 1) протягивается по обоим склонам долины р. Хасаут, от д. Хасаут примерно до верховьев б. Шиджатмаз, а второй наблюдается восточнее, в долине Малки, в районе ее притоков Уллу- и Чегет-Лахран.

Силурийские отложения детально описывались рядом авторов ^(2-4, 6, 8) что позволяет здесь дать им лишь краткую характеристику. Они подразделяются на две свиты — нижнюю свиту аркозовых песчаников (1100 — 1200 м) и верхнюю — известняково-сланцевую (видимая мощность 450 м)

Нижняя свита сложена плотными мелко- и среднезернистыми кварцитовидными песчаниками с прослоями кварцитов, мелкогалечных конгломератов и песчано-глинистых сланцев. Верхняя свита представлена филлитами с прослоями кремнистых сланцев и линзами известняков с обильной фауной верхних горизонтов силура. Эти линзы достигают 70 — 80 м мощности и с вмещающими их породами нередко имеют тектонические контакты, которые несут характер небольших межпластовых надвигов. Тем не менее несомненно, что известняки принадлежат этой толще, о чем свидетельствует наблюдаемое в ней частое переслаивание филлитов, известняков и известковистых филлитов (слои от долей до 5 — 10 см). Такие пачки переслаивания с увеличением количества известковистого материала постепенно переходят в упомянутые линзы массивных сплошных известняков.

Переход нижней свиты в верхнюю, как ранее уже отмечалось М. В. Муратовым⁽⁶⁾, постепенный. Он выражается в появлении в верхах нижней свиты прослоев филлитов и алевролитов, а в низах филлитовой свиты — мелко- и среднезернистых аркозовых песчаников, постепенно исчезающих вверх по разрезу. Правда, на водоразделе между рч. Урлеш и Ташлыкөл, где наблюдаются описанные взаимоотношения, контакт свит осложнен небольшим межпластовым срывом, который, однако, не нарушает картину постепенного перехода между свитами.

Силурийские отложения на юге приходят в соприкосновение с толщей метаморфических сланцев, прорванных так называемыми красными, или северными, гранитами верхнепалеозойского возраста. Метаморфическая толща сложена в основном чередующимися между собой пачками зеленых

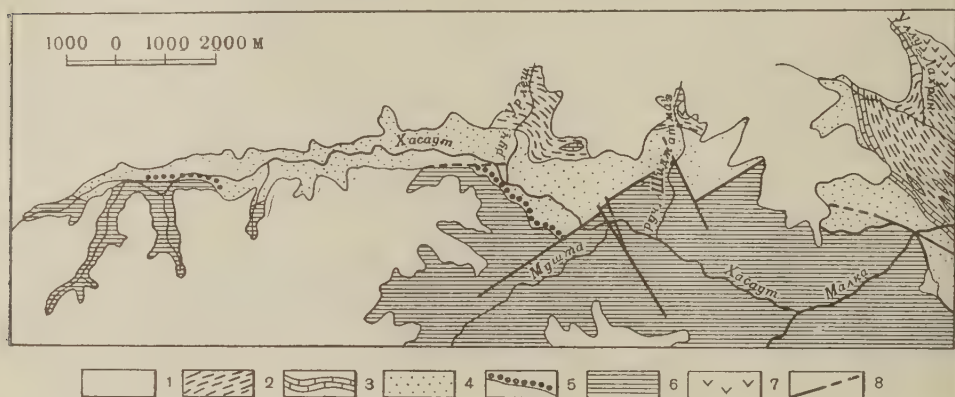


Рис. 1. Схематическая геологическая карта бассейна среднего течения р. Малки. 1 — мезозойские отложения; 2—5 — силурийские отложения: 2 — филлиты, 3 — линзы известняков среди них; 4 — кварцитовидные песчаники, 5 — конгломераты в их основании; 6 — метаморфические сланцы нижнего палеозоя; 7 — серпентиниты; 8 — основные разломы

и зеленовато-серых хлоритовых, серицит-хлоритовых и амфиболовых сланцев, кварцитов, рассланцованных туфогенных песчаников, в которых наблюдается большое количество пластовых залежей диабазов, дайки кварцевых порфиров и масса согласных и секущих кварцевых жил мощностью до десятков сантиметров. Горизонтом грубообломочных конгломератов эта толща делится на две свиты.

Контакт между силурийскими отложениями и метаморфической толщей прослеживается от д. Хасаут по правому борту долины р. Хасаут. Близ устья р. Мушты он резко поворачивает к северо-востоку, срезая простирающиеся породы, и скрывается под покровом юрских отложений. На Малке контакт силурийских отложений со сланцами проходит в субширотном направлении, пересекая Малку приблизительно в 3 км ниже устья Хасаута.

Господствующее представление о тектонических взаимоотношениях силурийских отложений и метаморфической толщи основывалось, очевидно, на экстраполяции данных, полученных при изучении прекрасного, легко доступного обнажения контакта на левобережье Малки, над тропой, на левом борту узкой долины, в устье которой выходит минеральный источник. Здесь пачка зеленовато-серых рассланцованных туфопесчаников и хлоритовых сланцев метаморфической толщи (азимут падения $30 - 40^\circ$, $\angle 50^\circ$) приходит в соприкосновение с кварцитовидными песчаниками нижней свиты силурийских отложений. На границе этих толщ наблюдается зона тектонической брекчии — грубообломочной породы, содержащей крупные обломки плотных буро-фиолетовых милонитов (до 0,5 м и более в длину), раздавленных и растащенных в такой же милонитизированной сланцеватой массе. Выше происходит постепенный переход брекчии в пачку катаклазированных и милонитизированных кварцитов, а еще выше — в зеленовато-бурые, иногда с фиоле-

овыми оттенками кварцитовидные песчаники. Общая мощность этой зоны 0 — 45 м; азимут падения брекчии 30 — 35°, \angle 40 — 45°; азимут падения вышележащих песчаников 35 — 40°, \angle 50°.

Таким образом, здесь с полной наглядностью выступает тектонический характер взаимоотношения этих толщ. Правда, М. В. Муратов⁽⁶⁾, Л. И. Паюк⁽⁷⁾, Е. А. Снежко и некоторые другие исследователи наблюдали отдельные выходы конгломератов в основании нижней свиты силура, но не проследили их по площади и не придавали им стратиграфического значения. Автору летом 1957 г. совместно с С. М. Седенко и при исследованиях в последующие годы удалось проследить эти конгломераты и выявить несогласие между силуром и метаморфической толщей.

Конгломераты залегают в основании нижней свиты силура и протягиваются от левого водораздельного хребта между Хасаутом и Муштой (от высоты 1799,0 м) на запад по правому борту долины Хасаута (рис. 1). Они желтовато-серые с обильной галькой кварца и небольшим количеством мелких обломков светлых зеленовато-серых ожелезненных кварцево-серицит-хлоритовых сланцев. Галька кварца округлая и эллипсоидальная, размерами от 1 до 7 — 8 см, хорошо окатана. Обломки сланцев по размеру не превышают 2 — 4 см; обычно они уплощенные, угловатые. Цемент конгломератов — среднезернистый кварцевый песчаник, местами со значительной примесью хлорита и серицита. Мощность пласта конгломератов — 6 м.

Выше по разрезу конгломераты постепенно обедняются галькой и переходят в крупнозернистые аркозовые песчаники, в которых лишь иногда видны мелкие обломки сланцев.

В обнажении около высоты 1799,0 м хорошо видно, что пласт конгломератов подстилается зелеными и желтовато-серыми серицит-хлоритовыми сланцами метаморфической толщи, не отличимыми от тех, что находятся в виде обломков в конгломератах. Азимут падения сланцев непосредственно близ контакта 35 — 40°, при углах падения 60 — 70°; азимут падения конгломератов 50 — 55°; углы падения около 60°.

К западу от описанной точки на протяжении 3 — 3,5 км контакт силурийских отложений с метаморфическими сланцами имеет аналогичный характер, а затем осложняется разломом широтного простирания (рис. 1), который срезает нижние горизонты силура. Лишь у д. Хасаут вновь наблюдаются базальные конгломераты последнего, но здесь они отделены от метаморфических сланцев небольшим широтным сбросом. К востоку от высоты 1799,0 м контакт проходит по разлому северо-восточного простирания и скрывается под юрским покровом.

Восточнее, в долине р. Малки, стратиграфические взаимоотношения рассматриваемых свит не наблюдаются. На ее левобережье, к западу от описанного выше надвига, имеющего северо-западное простирание (300 — 305°), граница двух толщ протягивается в юго-западном направлении (250°) и представляет собой разлом. Как это хорошо видно на левобережье Малки, в 1,5 км ниже устья Хасаута, силурийские кварцитовидные песчаники (азимут падения 70°, \angle 75 — 80°) граничат с зелеными сланцами (азимут падения 40 — 45°, \angle 35 — 40°) по резкому контакту без каких-либо следов катаклаза и милонитизации. Таким образом, надвиг наблюдается лишь на небольшом протяжении рассматриваемого контакта.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что силурийские отложения налегают на метаморфические сланцы с угловым несогласием и базальными конгломератами. Стратиграфический перерыв между этими комплексами подтверждается и разной степенью их метаморфизма и дислоцированности. Метаморфическая толща, по нашим данным, еще до отложения силурийских пород претерпела региональный метаморфизм, который и привел к образованию зеленых сланцев с зонами окварцевания и эпидотизации и огромным количеством кварцевых инъекций. К досилурийскому времени относится и ряд проявлений интрузивной деятельности, привед-

шей к образованию в метаморфической толще массивов плагиогранитов и амфиболитов, пластовых тел диабазов и даек кварцевых порфиров, которые не проникают в силурийские отложения.

Силурийские отложения представлены слабометаморфизованными песчаниками, филлитами и известняками. Граница резкой смены степеней метаморфизма проходит точно по контакту метаморфической толщи и силурийских пород, и поэтому никак нельзя согласиться с мнением А. П. Резникова⁽⁸⁾ о постепенном падении метаморфизма от нижнего комплекса к верхнему.

Тектоника сланцевой полосы чрезвычайно сложна. К северу от массива «северных» гранитов в сланцах вырисовывается крупная антиклинальная складка с осью субширотного простирания, погружающейся к юго-востоку. Крылья ее осложнены дополнительной складчатостью разных порядков вплоть до мелкой пloyчатости, и многочисленными разломами, главную роль среди которых играют разломы субширотного, субмеридионального и северо-восточного простирания. Структура силурийских отложений значительно проще. Они образуют в долине Хасаута моноклинали субширотного простирания, с падением пластов на северо-восток под углами в среднем 45—50°. На фоне общего моноклиального залегания наблюдаются лишь отдельные флексуобразные складки и небольшие разрывные нарушения типа надвигов и межпластовых срывов.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что верхней возрастной границей метаморфической толщи является верхний силур. Этот вывод в последнее время приобретает особенное значение в связи с тем, что возраст метаморфических свит Северо-Западного Кавказа (район Б. и М. Лабы) относимых ранее также к нижнему палеозою⁽⁹⁾, в последнее время пересматривается и все большее число исследователей склоняется в пользу их девонского возраста⁽¹⁰⁾ и др.). Иными словами, метаморфические толщи междуречья Чегема и Кубани остаются единственными заведомо досилурийскими образованиями в области Северного склона Кавказа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. П. Герасимов, М. Я. Янишевский, Изв. Геол. ком., 35, № 7 (1916).
² А. П. Герасимов, Изв. Геол. ком., 48, № 7 (1929). ³ А. П. Герасимов, Тр. Центр. научно-иссл. геол.-разв. инст., в. 123 (1940). ⁴ А. А. Каденский, Магматическая геология Передового хребта Северо-Западного Кавказа, Изд. АН СССР 1956. ⁵ В. А. Мельников, Бюлл. научно-технич. информ. Министерства геологии и охраны недр СССР, № 4 (2) (1959). ⁶ М. В. Муратов, Тр. Московск. геол.-разв. инст., 23, № 8 (1948). ⁷ Л. И. Пазюк, Уч. зап. Рост. гос. унив., в. 10 (1937). ⁸ А. П. Резников, Уч. зап. Кабард. научно-иссл. инст., 3 (1938). ⁹ В. Н. Робинсон, Тр. Всесоюзн. геол.-разв. объедин., в. 226 (1932).

В. А. КУЗНЕЦОВ

О ВОЗРАСТЕ ВУЛКАНОГЕННО-ОСАДОЧНЫХ ТОЛЩ ЮГО-ЗАПАДНОГО КРЫЛА ХОЛЗУНСКО-ЧУЙСКОГО АНТИКЛИНОРИЯ РУДНОГО АЛТАЯ

(Представлено академиком Д. В. Наливкиным 28 XI 1960)

Мощные вулканогенно-осадочные толщи, слагающие юго-западные склоны Холзунско-Чуйского антиклинория, до сего времени считались образованиями девонского возраста. Однако полученные нами некоторые новые данные позволяют оспаривать такое утверждение.

Летом 1959 г. автор принимал участие в геологосъемочных работах Алатайской экспедиции на стыке Белоубинского синклинория и Холзунско-Чуйского антиклинория, в бассейне среднего и верхнего течения р. Хамир.



рис. 1. 1 — остаток водоросли ($22 \times 80 \mu$, образец № 52^a); 2 — *Archaeohystrichosphaeridium* sp. ($d = 20-22 \mu$, № 52^a); 3 — *Symplassosphaeridium subcoaleitum* Tim. ($d = 18-20 \mu$, № 52^a); 4 — *Zonosphaeridium* aff. *actinomorphum* Tim. ($d = 84-86 \mu$, № 52^a); 5 — *Archaeohystrichosphaeridium crispatum* Tim. ($d = 44-68 \mu$, № 52^a); 6 — *A. angulosum* Tim. ($d = 54-56 \mu$, № 52^a); 7 — *Trachydiacrodium maximum* Tim. ($42 \times 60 \mu$, № 52^a); 8 — *Trachyzonodiacrodium* sp. ($44 \times 66 \mu$, № 52^a); 9 — *Leioligotritetum minutissimum* (Naum.) Tim. ($d = 30-36 \mu$, № 52^a); 10 — *Mycteroligotritetum marmoratum* Tim. ($d = 44-46 \mu$, № 1560 z); 11 — *M.* sp. ($d = 98-102 \mu$, № 1553^a); 12 — *Bothroligotritetum exasperatum* Tim. ($d = 116-118 \mu$, № 1553^a). Увел. 10×40 , репрод. 2 : 3

В названном районе развит комплекс вулканогенно-осадочных пород, общей мощностью около 500 м, не содержащий никаких фаунистических остатков и разделенный на две части по литологическому составу пород.

Нижняя часть (алевролиты, аргиллиты, известняки с линзами кварцевых альбитофиров и их туфов) мощностью 1500—2000 м отождествляется

с холзунской свитой ($D_2e^{1-2} chl$), стратотип которой выделен на соседней западной планшете в верховьях р. Тургусун; здесь в основании мощной вулканогенно-осадочной толщи было найдено несколько мшанок плохой сохранности девонского возраста ⁽³⁾.

Верхняя часть существенно вулканогенная (кварцевые альбитофировые и их туфы с линзами лавобрекчий, аргиллитов, известняков и песчаников мощностью 2500—3000 м параллелизуется с успенской свитой ($D_2gv us$). Стратотип успенской свиты выделен на Лениногорском рудном поле, где мощная эффузивная толща, не содержащая органических остатков, перекрывает сокольскую свиту с обильной фауной верхов эйфельского яруса ⁽⁴⁾.

Как видно из изложенного выше, лишь сходный состав пород послужил основанием для сопоставления отложений верхнего и среднего течения бассейна р. Хамир с холзунской и успенской свитами среднедевонского возраста, выделенными в соседних районах.

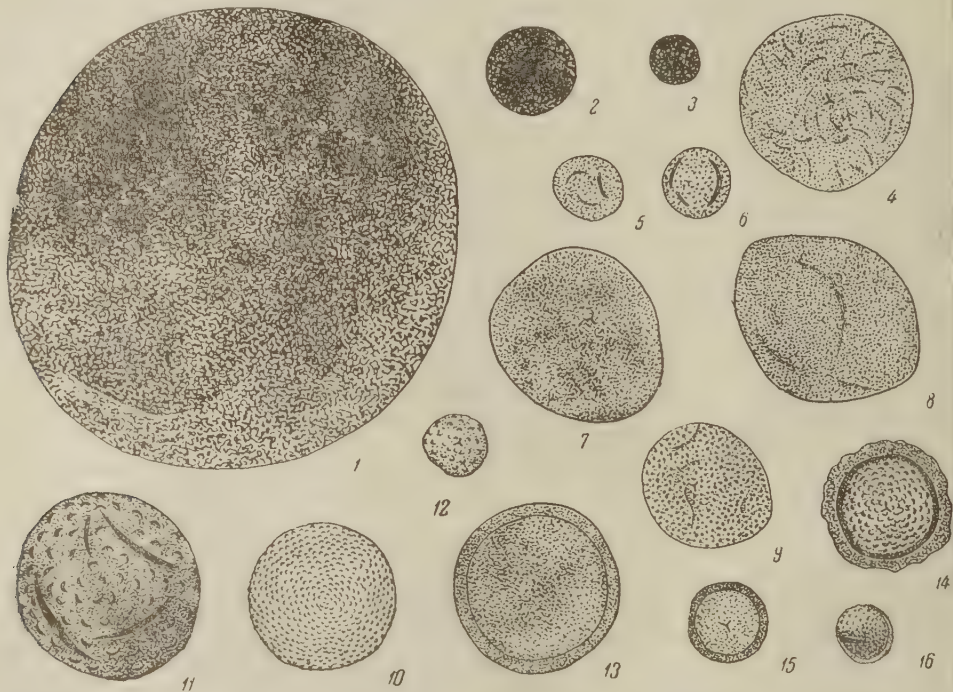


Рис. 2. 1—*Bothroligotriletum auctum* Tim. ($d = 175-180 \mu$, образец № 1553^a); 2—*B. exasperatum* Tim. ($d = 35-40 \mu$, № 1553^a); 3—*B. exasperatum* Tim. ($d = 20-22 \mu$, № 1553^a); 4—*Trachyoligotriletum rugosum* Tim. ($d = 69-70 \mu$, № 1560^b); 5—*T. incrassatum* Tim. ($d = 26-28 \mu$, № 52^a); 6—*T. minutum* (Naum.) Tim. ($d = 27-29 \mu$, № 120^a); 7—*T. planum* Tim. ($d = 65-70 \mu$, № 1553^a); 8—*T. nevelense* Tim. ($d = 64-70 \mu$, № 1560^b); 9—*Ocridoligotriletum kryshstofovichi* (Naum.) Tim. ($d = 46-50 \mu$, № 1560^b); 10—*Tyroligotriletum asperum* Tim. ($d = 54-56 \mu$, № 1560^b); 11—*Lopholigotriletum* (?) *obtusatum* Tim. ($d = 70-72 \mu$, № 52^a); 12—*L. coriaceum* Tim. ($d = 25-26 \mu$, № 52^a); 13—*Stenozonoligotriletum validum* Tim. ($d = 62-64 \mu$, № 1553^a); 14—*S. torosum* Tim. ($d = 50-52 \mu$, № 52^a); 15—*S. sokolovi* Tim. ($d = 31-33 \mu$, № 1553^a); 16—*Zonoidium strobiliforme* Tim. ($d = 20-22 \mu$, № 52^a). Увел. 10×40 , репрод. 2 : 3

В целях обоснования среднедевонского возраста пород был произведен спорово-пыльцевой анализ 12 образцов, отобранных автором по предложению начальника партии А. К. Каймакова и обработанных в спорово-пыльцевой лаборатории кафедры палеонтологии Саратовского университета. Образцы были представлены углистыми сланцами, алевролитами, аргиллитами, туфо-песчаниками и известняками, они характеризовались рассланцованностью, темной окраской и большой прочностью. В результате исследования в 5 образцах нами был обнаружен сравнительно богатый ком

лекс спор, но не девонского, а гораздо более древнего — кембрийского — возраста. Всего нам удалось выделить 27 видов, относящихся к 14 родам: *Symplassosphaeridium subcoalitum* Tim., *Zonosphaeridium* aff. *actinomorphum* Tim., *Archaeohystrichosphaeridium crispatum* Tim., *A. angulosum* Tim., *A. sp.*, *Trachydiacrodium maximum* Tim., *Trachyzonodiacrodium* sp., *Leioligotritileum minutissimum* (Naum.) Tim., *Mycteroligotritileum marmoratum* Tim., *M. sp.*, *Bothroligotritileum exasperatum* Tim., *B. auctum* Tim., *Trachyoligotritileum rugosum* Tim., *T. incrassatum* Tim., *T. minutum* (Naum.) Tim., *T. planum* Tim., *T. nevelense* Tim., *T. asperatum* Tim., *Ocridoligotritileum kryshstofovich* (Naum.) Tim., *Tyoligotritileum asperum* Tim., *T. induratum* Tim., *Lopholigotritileum* (?) *obtusatum* Tim., *L. coriaceum* Tim., *Stenozonoligotritileum validum* Tim., *St. torosum* Tim., *Stenozonoligotritileum sokolovi* Tim., *Zonocoidium strobiliforme* Tim.

Следует отметить высокое содержание спор в трех исследованных образцах (в одном препарате удавалось подсчитать 150—200 форм); остальные

рис. 3. 1 — *Trachyzonodiacrodium signatum* Tim. ($d = 30-50 \mu$, образец № 4081); 2 — *Lophorytidodiacrodium* aff. *filiforme* Tim. ($d = 40-50 \mu$, № 4083); 3 — *Trachyoligotritileum obsoletum* Tim. ($44 \times 66 \mu$, № 4083); 4 — *T. asperatum* Tim. ($d = 38-40 \mu$, № 52^a); 5 — *Tyoligotritileum induratum* Tim. ($d = 44-46 \mu$, № 120^a); 6 — *Stenozonoligotritileum pervium* Tim. ($d = 30-4 \mu$, № 4081). Увел. 10×40 , репрод. 2 : 3



два образца характеризовались редким содержанием спор (1—6 форм в одном препарате). Кроме того, нами было исследовано три образца с соседнего, западного планджета, отобранных из низов белоубинской свиты⁽⁴⁾, возраст которой датируется как нерасчлененный средний — верхний девон на основании находок фауны плохой сохранности. Однако ни одной девонской формы в данных образцах найдено не было, зато удалось обнаружить комплекс кембрийских спор, сходный с вышеописанным. Количественно споры представлены очень редко (1—2 формы в препарате), тем не менее нами было подсчитано 25 форм, включающих 13 видов, отнесенных к 8 родам: *Lophorytidodiacrodium* aff. *filiforme* Tim., *Trachyzonodiacrodium signatum* Tim., *Bothroligotritileum exasperatum* Tim., *Mycteroligotritileum marmoratum* Tim., *Trachyoligotritileum incrassatum* Tim., *T. planum* Tim., *T. obsoletum* Tim., *T. asperatum* Tim., *Ocridoligotritileum kryshstofovich* (Naum.) Tim., *Lopholigotritileum grumosum* Tim., *Stenozonoligotritileum pervium* Tim., *St. validum* Tim., *St. torosum* Tim.

Сходные с вышеуказанными комплексы спор были обнаружены в нижнекембрийских отложениях Прибалтики⁽⁵⁾, а также в мотской, карагасской и оселочной свитах южной окраины Сибирской платформы, сопоставляемых с алданским ярусом⁽²⁾.

Таким образом, предположение о среднедевонском возрасте эффузивно-осадочных толщ, развитых в бассейне среднего и верхнего течения р. Хантай, данными спорово-пыльцевого анализа не подтверждается; однако и нижнекембрийский возраст этих отложений пока нельзя считать твердо доказанным, учитывая малый объем исследованного материала (всего 8 образцов). Кроме того, необходимо принять во внимание, что детальные микропалеоботанические исследования на Алтае не проводились, не создано поровых эталонных шкал для Алтае-Саянской складчатой области, вследствие чего полученные нами результаты приходится сравнивать с данными таких отдаленных территорий, как Русская платформа. Однако сам факт нахождения древних спор в эффузивноосадочных толщах является очень

интересным и важным, так как он доказывает возможность использования спорово-пыльцевого анализа при расчленении фаунистически «немых» нижнепалеозойских отложений Алтае-Саянской складчатой области.

Предположение о развитии нижнекембрийских отложений на юго-западных склонах Холзунско-Чуйского антиклинория, подтверждаемое обнаруженными нами споровыми комплексами, согласуется с геологическими данными. Исследованный район располагается в восточной краевой части герцинской складчатой области. Некоторые исследователи считают даже, что ее правильнее рассматривать как часть каледонского пояса, переработанного позднепалеозойскими движениями ⁽¹⁾.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
23 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Геологическое строение СССР, 3, М., 1958. ² З. Х. Ильясова, Л. А. Лысова, Сборн. Геология и нефтегазоносность Восточной Сибири, М., 1959. ³ В. А. Комар, Всесоюз. аэрогеол. трест, в. 3 (1957). ⁴ Стратиграфический словарь СССР, М., 1956. ⁵ Б. В. Тимофеев, Древнейшая флора Прибалтики и ее стратиграфическое значение, М., 1959.

Н. А. ЛЕБЕДЕВА и Г. И. ПОПОВ

НОВЫЕ ДАННЫЕ О ВЕРХНЕМ ПЛИОЦЕНЕ КУБАНИ

(Представлено академиком А. Л. Яншиным 16 XI 1960)

Верхнеплиоценовые отложения Кубани изучены слабо и недостаточно освещены в геологической литературе. Нижние горизонты верхнего плиоцена, являющиеся аналогами акчагыльского яруса Каспия, до настоящего времени на Кубани вообще не отмечались. Несколько пунктов развития орского акчагыла известно на Тамани; из них лучшим является район Юливадиной горы, где развит таманский горизонт с фауной акчагыльского ила (³, ⁸). Остаются до настоящего времени совершенно неясными пути обобщения акчагыльских бассейнов Понта и Каспия и пути миграции соответствующей фауны.

По мнению одних исследователей (³), сообщение происходило через Маныч и акчагыльское море, не захватывая кубанской депрессии. По мнению других (¹), соединение осуществлялось через так называемый Ставропольский пролив (⁴), простиравшийся от Минеральных вод на Кубань. Ни в одном из районов предполагаемых проливов акчагыльские осадки до настоящего времени обнаружены не были.

При работах на Кубани были обнаружены новые местонахождения фауны, что позволит дополнить прежние представления о развитии верхнего плиоцена в этой области.

В обрывах левого берега р. Псекупса, ниже ст. Саратовской, летом 1960 г. И. А. Лебедевой была собрана обильная фауна пресноводных моллюсков, определение которых проведено Г. И. Поповым. Остатки фауны залегают здесь в толще пород, образующих цоколь 35—40-метровой террасы р. Псекупса. Вмещающие раковины породы представлены аллювиальными ожелезненными ржаво-коричневыми песками с прослоями серых и синеватых песчанистых глин, алевроитов и ожелезненных мелкогалечных конгломератов. Вверх по разрезу пески сменяются плотными известковистыми астрокветными и краснокветными супесями и глинами, напоминающими некоторые разности так называемых скифских глин Приазовья. Видимая мощность древнеаллювиальных отложений, слагающих цоколь 35-метровой террасы, 10—12 м. На этой высоте над уровнем реки они срезаны поверхностью размыва и перекрыты отложениями вышележащей террасы. Фауна была собрана в двух выходах пород. Один из них, нижний, представлен серо-синими песчанистыми глинами и песками с прослоями ожелезненных конгломератов, которые обнажаются у самого уреза воды и местами выстилают русло. В этих породах определено 60 экземпляров (стенок) массивных скульптурированных («левантинских») форм унioniд, относящихся к виду *Unio tamanensis* Ebers. Именно этот горизонт псекупского азреза описан В. И. Громовым как горизонт, заключающий наиболее древнюю фауну млекопитающих псекупского комплекса (*Elephas meridionalis* Nesti, *Cervus* cf. *pliotarandoides* Alessandri). Другой выход отложений расположен несколько выше по реке, в средней части цоколя (4—4,5 м над

рекой), представлен грубозернистыми ржавыми песками и гравелитами. Контакт с породами нижнего горизонта закрыт оползнями, и наблюдать его не удалось. Здесь обнаружена более разнообразная фауна: *Unio tamanensis* Ebers 16 экз., один из них с сомкнутыми створками; *U. subcrassus* sp. 21 экземпляр, один из них с сомкнутыми створками; *U. kujalnicensis* Mang. 1 целая и 3 неполные створки; *U. cf. kujalnicensis* Mang. 5 экземпляров, один из них имеет сомкнутые створки; *Anodonta aff. transcasicasica* Alz. 3 обломанных створки; *A. sp.* 1 обломок; *Melanopsis esperoides* Sabba 66 + 13 молодых + 39 неполных экземпляров; *Lithoglyphus neimayri* Sabba 69 + 51 молодых + 37 неполных экземпляров; *Valvata silvatica* Neum. 44 + 29 молодых + 6 неполных экземпляров; *Hydrobia ulmi* Neum. 4 + 1 молодых экземпляров; *Corbicula aff. jassiensis* Cor. 2 + 1 молодых + 4 неполных экземпляров; *Sphaerium* sp. 2 экземпляра; *Viviparus* sp. (тонкостенный) — обломки.

Присутствие среди обнаруженной фауны *Unio tamanensis* и *U. kujalnicensis* определяет акчагыльский возраст рассматриваемых отложений. Униониды определены путем непосредственного сравнения с многочисленными экземплярами обоих видов, соответственно из таманского горизонта и домашних отложений.

Unio tamanensis Ebers. описан из акчагыльских отложений Таманского полуострова (таманский горизонт) и обнаружен Г. И. Поповым в акчагыльских отложениях Башкирии (средний акчагыл).

U. kujalnicensis Mang. описан из куяльницких отложений окрестностей Одессы (верхний куяльник) и известен из домашних отложений Кубышевского Заволжья (верхний акчагыл).

Псекупская фауна представляет большой интерес в том отношении, что в ее составе впервые обнаруживается совместное нахождение массивных скульптурированных («левантинских») унионид (*U. tamanensis*) и сравнительно тонкостенных гладких форм (*U. kujalnicensis*, *U. subcrassus*, которые являются непосредственными предшественниками некоторых апшеронских четвертичных и современных унионид. Интересно, что в самом нижнем горизонте описываемых отложений тонкостенные формы унионид не обнаружены. Отсутствие четко наблюдаемого контакта между нижними и более высокими горизонтами пород, содержащих фауну, оставляет открытым вопрос об одновозрастности всего описанного комплекса фауны. Совместное нахождение в нижнем горизонте разреза фауны млекопитающих псекупского комплекса (*Elephas meridionalis* Nesti и *Cervus cf. pliotarandoides* Alessandri) с акчагыльскими формами унионид заставляет предположить акчагыльский возраст фауны млекопитающих и вмещающих их древнеаллювиальных осадков.

Имеются сведения о возможном существовании акчагыльских слоев не только по другим районам Кубани. В 1958 г. Н. В. Ренгартен (?) обнаружила морские отложения в кровле красноцветной армавирской свиты в районе Армавира. Н. А. Лебедевой удалось проследить эти отложения вниз по р. Кубани по естественным разрезам и буровым скважинам и выяснить их stratigraphическое положение (рис. 1) среди континентальных толщ кубанского прогиба. По имени ст. Прочноокопской, где имеется наилучшее обнажение морского горизонта, он назван прочноокопским.

Морские отложения образованы горизонтально-слоистой пачкой тонкозернистых глинистых песков, светло-серых и палевых алевролитов и мергелей. В этих породах в изобилии встречаются раковины фораминифер, спонгулы губок, обломки панцирей иглокожих, скелетные остатки известняковых водорослей. Характерно наличие аутигенного глауконита. Присутствие аутигенного глауконита и остатков иглокожих свидетельствует о значительной солености морского бассейна, в котором происходило накопление осадков.

В пределах Восточно-Кубанского прогиба прочноокопский горизонт хорошо прослеживается в естественных разрезах и по ряду скважин (и

глубине 40—50 м). Он с резким размывом залегает на континентальных мио-плиоценовых породах армавирской свиты и несогласно перекрывается галечниками IV (апшеронский или гюнцерской) террасы. К западу, по мере погружения армавирской свиты, описанный нами морской горизонт переходит на более молодые красноцветные отложения, которые, по данным скважин, уже на меридиане ст. Тифлисской, на глубине 250—300 м, подстилаются морскими отложениями понта. Далее этот же горизонт продолжается в область западно-кубанского прогиба, где он прослеживается на больших глубинах и достигает значительной мощности, залегая здесь на отложениях с куяльницкой фауной.

Анализ керна буровых скважин в районе г. Краснодара, проведенный Н. В. Ренгартен, показал, что в толще континентальных пород, на глубинах от 200 до 350 м отчетливо выделяется горизонт, несущий признаки

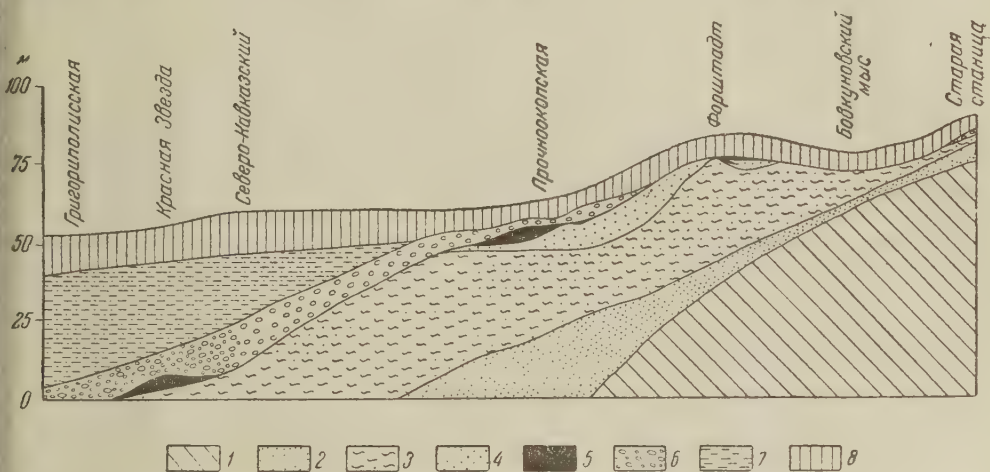


Рис. 1. Стратиграфическое положение прочноокопского горизонта в разрезе плиоценово-четвертичных отложений правобережья Кубани. 1 — N_1 , морские отложения сарматского яруса; 2 — N_{1-2} , нижняя пачка «каравайных» песчаников армавирской свиты; 3 — N_{1-2} , пестроцветные песчаные глины и глинистые пески собственно армавирской свиты; 4 — $N_2?$, верхняя пачка диагонально-слоистых песков и песчаников; 5 — $N_2?$, морские «надармавирские» отложения (прочноокопский горизонт): глины, мергели, пески и конгломераты; 6 — N_2 , верхнеплиоценовые (гюнцские) галечники и пески IV террасы р. Кубани; 7 — Q, пестроцветный аллювий и красно-бурые глины III террасы р. Кубани; 8 — Q, лессовидные суглинки высоких террас

морского или лиманно-морского происхождения. Он образован переслаиванием тонких глинистых песков, карбонатизированных глин и алевроитов с характерным присутствием зерен свежего глауконита. Среди рудных минералов преобладает ильменит; высоко содержание эпидота и цоизита. В породах много раковин мелких фораминифер. В этом же горизонте присутствуют обломки раковин *Unio* sp. и *Viviparus* sp., что свидетельствует о значительном опреснении отдельных участков бассейна. Указанный горизонт лиманно-морских отложений подстилается толщей пятнистых озерных глин и алевроитов в *Dreissensia theodori* Andrus, относимой к куяльницкому ярусу. Перекрывается он толщей континентальных (озерноаллювиальных) осадков, в которых на глубине 80—90 м С. А. Яковлевым был найден обломок.

Стратиграфическое положение выявленного морского горизонта в верхах куяльницкого яруса и ниже отложений с апшеронской фауной позволяет в виде предположения (до изучения фауны фораминифер) определить его возраст как верхний куяльник — акчагыл. Таким образом, конец среднего или начало верхнего плиоцена характеризовались глубоким вторжением моря в область Кубанского прогиба, где в это время существовал узкий за-

лив-лиман или пролив. Возможно, что пресноводная фауна р. Псекупса отражает условия рек, впадавших в этот пролив со стороны Кавказа.

Поступило
6 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Гатуев, Тр. Геол. инст. АН СССР, 2 (1932). ² В. И. Громов, Тр. Инст. геол. наук, в. 64, геол. сер., № 17 (1948). ³ И. М. Губкин, Проблема акчагыла в свете новых данных, Изд. АН СССР, 1931. ⁴ В. П. Колесников, Стратиграфия СССР, 12, 1940. ⁵ Г. Ф. Мирчинк, Матер. по четвертичному периоду СССР, 1936. ⁶ Г. И. Попов, Матер. по геологии и полезным ископаемым Азово-Черноморья, Сборн. 22 (1947). ⁷ Н. В. Ренгартен, ДАН, 129, № 3 (1959). ⁸ А. Г. Эберзин, Стратиграфия СССР, 12 (1940). ⁹ А. Г. Эберзин, Геология СССР, 9 (1947). ¹⁰ С. А. Яковлев, Тр. совещ. по обслед. и изуч. Кубанского края, 9, в. 1, 1922.

П р и м е ч а н и е. Весьма интересно указание авторов на присутствие в прочноокопском горизонте остатков иглокожих и аутигенного глауконита, которые до сих пор в солончатоводных отложениях акчагыла и куяльника никем не отмечались. Подходя к вопросу формально, можно сказать, что этот факт противоречит стратиграфическим заключениям автора. Однако не исключена возможность, что в Кубанском прогибе бассейн акчагыльского времени обладал более нормальной соленостью, чем в Каспийской области. Проверка этих данных очень важна для решения вопроса о происхождении и путях миграции акчагыльской фауны.

А. Яншин

Р. Х. ЛИПМАН

**СОСТАВ МИКРОФАУНЫ НУММУЛИТОВЫХ СЛОЕВ
МЫСА ИЗЕНДЫ-АРАЛ НА СЕВЕРНОМ БЕРЕГУ
АРАЛЬСКОГО МОРЯ**

(Представлено академиком А. Л. Яншиным 16 XI 1960)

На северном берегу Аральского моря, в юго-восточной части полуострова Куланды, еще в 1848 г. А. И. Бутаков⁽²⁾ обнаружил выходы нуммулитовых известняков, слагающих скалистый мыс Изенды-Арал. Первые определения ископаемой фауны этих известняков были даны в 1858 г. Г. В. Аби-хом⁽¹⁾. Тем не менее, только сравнительно недавно А. Л. Яншин⁽³⁾ установил лютетский возраст этих известняков, а также стратиграфическое взаимоотношение между ними и толщей морских песчано-глинистых палеогеновых пород, широко распространенной в Северном Приаралье. На основании послонного описания многих разрезов, определения содержащихся в них комплексов фауны и ряда других геологических данных А. Л. Яншин доказал, что в Приаралье нуммулитовые слои залегают в основании толщи песчано-глинистых пород, выделенных им в тасаранскую свиту средне- и верхнеэоценового возраста.

Однако до сих пор не было известно, какой из фораминиферовых зон эоцена Крымско-Кавказской области соответствуют нуммулитовые известняки побережья Аральского моря.

Для выяснения этого вопроса мною, совместно с И. А. Хохловой, в 1957 г. на мысе Изенды-Арал были описаны разрезы нуммулитовых известняков и перекрывающих их песчаных глин, и отобраны из них образцы на микрофаунистический анализ.

Изученные обнажения находятся к западу и к востоку от построек рыбачьего промысла Изенды.

В скалах к западу от промысла обнажается нижняя часть нуммулитовых слоев. Здесь над глауконитовыми песчаниками верхнего мела залегают белые и желтоватые нуммулитовые известняки, песчаные нуммулитовые известняки с фосфоритовой галькой, нуммулитовые ракушники, состоящие из целых, обломанных и раздробленных раковин нуммулитов. Мощность их до 6 м. В скалах к востоку от промысла обнажается верхняя часть нуммулитовых известняков, которые здесь состоят преимущественно из раздробленных и единичных целых раковин нуммулитов; встречается редкая мелкая фосфоритовая галька. Видимая мощность известняков около 3 м. Они перекрываются коричневыми сильно песчанистыми глинами и глинистыми песчаниками, мощностью 0,5 м. Контакт известняков и глин хорошо наблюдается в шурфе. Выше залегают тонко-листоватые темные серовато-зеленые глины, мощностью 1,5 м, а над ними коричневатые кварцевые слабо сцементированные песчаники с нуммулитами видимой мощностью 2,5 м.

Микрофаунистическому анализу были подвергнуты образцы из всех литологических разностей палеогеновых пород, выходящих на мысу Изенды-Арал. Помимо ранее известных отсюда нуммулитов, в них автором установлены четыре микрофаунистических комплекса.

Определения нуммулитов выполнены В. К. Василенко, мелких фораминифер и радиолярий — Р. Х. Липман, остракод — И. А. Хохловой.

По заключению В. К. Василенко, образцы содержат однообразный комплекс нуммулитов, механически отсортированных и в некоторых образцах сильно раздробленных; во всех образцах повторяются *Nummulites* ex gr. *distans* Desh., *N. ex gr. murchissoni* Brun., *N. globulus* Leym., *N. sp.* преобладает *N. ex gr. distans* Desh.; возраст всех пород, вмещающих нуммулиты, нижелютетский.

Более полный список нуммулитов из этих пород дает А. Л. Яншин (⁵ стр. 268—274).

Первый комплекс мелких фораминифер установлен в нуммулитовых известняках. По составу он одинаков в выходах к западу и к востоку от промысла; там и здесь встречены следующие формы: *Dorothia* sp., *Nodosaria radricula* Linne, *N. bacillum* DeFrance, *N. cf. soluta* (Reuss), *Cristellaria laticostata* Tutkov., *C. cf. turbinata* Plum., *C. aff. limbosa* (Reuss), *C. aff. earlandi* Plum., *Globulina* sp., *Polymorphina ovata* Orb., *Gyroidina soldanii* Orb., *C. kulandaensis* sp. n., *Eponides jacksonensis* Cushm., *Siphonina* aff. *prima* Plum., *Pseudoparella culter* (Par. et Jon.), *Alabamina obtusa* (Burro et Holl.), *Asterigerina* sp., *Anomalina ammophila* (Gumb.), *A. umbilicata* (Brotz.), *A. ex gr. danica* (Brotz.), *A. ex gr. acuta* Plum., *A. grosserugosa* (Gümb.), *Cibicides eocaenus* (Gümb.), *C. infraferganensis* N. Byk., *C. perlucides* Nuttall, *C. praepperlucides* Nikit., *C. pseudoperlucides* N. Byk., *C. aralensis* sp. n., *Globigerina triloculinoides* Plum., *G. bulloides* Orb., *C. eocaenica* Terquem, *Acarina crassaformis* (Gall. et Wiss), *A. cf. pentacamerata* Subb., *Globorotalia* sp., *Uvigerina* sp., *Cassidulina* sp.

Помимо фораминифер встречены зубы рыб и иглы морских ежей.

Второй комплекс установлен в коричневатых, сильно песчанистых глинах, кроющихся нуммулитовые известняки. Он представлен фораминиферами *Rhizammina* sp., *Haplophragmoides* sp., *Spiroplectammina* sp., *Bolivinaopsis turgaicus* Balakh., *Cristellaria laticostata* Tutkov., *C. sp.*, *Gyroidina* sp., *Eponides* sp., *Siphonina* sp., *Asterigerina* sp., *Anomalina ammophila* (Gümb.), *A. umbilicata* (Brotz.), *A. ex gr. acuta* Plum., *Cibicides eocaenus* (Gümb.), *C. perlucides* Nuttall., *C. praepperlucides* Nikit., *C. pseudoperlucides* N. Byk., *C. infraferganensis* N. Byk., *C. aralensis* n. sp., *Globigerina triloculinoides* Plum., *Truncorotalia cf. aragonensis* Nuttall., *Cassidulina* sp.

Так же как и в нижележащих нуммулитовых известняках, здесь преобладают виды группы *Cibicides eocaenus* (Gümb.), но в отличие от первого комплекса, во втором появляются песчанистые фораминиферы, радиолярии и остракоды. Радиолярии представлены: *Cenodiscus* sp. и *Sethocyrtis* sp. Из остракод найдены обломки *Cythereis* sp. и *Cyprides cf. torosa littoralis* (Brady). Встреченные спикулы губок и зубы рыб не определялись.

Третий комплекс заключен в тонколистоватых серовато-зеленых глинах. Он состоит из многочисленных фораминифер и обильных радиолярий, виды которых характерны для отложений нижней части тасаранской свиты. Присутствуют ядра неопределимых остракод. Известковые раковины фораминифер часто замещены кремнеземом.

Определены фораминиферы: *Rhabdammina eocaenica* Cushm. et Hann., *Rhizammina* sp., *Reophax* sp. 1, *R. sp. 2*, *Haplophragmoides tenuis* sp. n., *H. spp.*, *Recurvirodes* sp., *Cyclammina ex gr. pseudocancellata* Chal., *C. sp.*, *Ammobaculites* sp., *Ammomarginulina* sp. 1, *A. sp. 2*, *Spiroplectammina* sp. 1, *sp. 2*, *Textularia cf. eocaena* Gümb., *Vulvulina haeringiensis* (Gümb.) V. sp., *Bolivinaopsis turgaicus* Balakh., *B. gracilis* n. sp., *B. elongatus* (Nikit.), *B. spp.*, *Vernuilina* sp., *Gaudryina ex gr. rugosa* Reuss, *Clavulinoides eozaboi* Balakh. et Sapers., *Clavulina ex gr. angularis* Orb., *C. ex gr. akushanica* Damp., *Nodosaria* sp., *Cristellaria* spp., *Marginulina* sp., *Dentalina* sp., *Gyroidina soldani* Orb., *G. sp.*, *Eponides* sp., *Anomalina ammophila* (Gümb.), *A. umbilicata* (Brotz.), *A. ex gr. acuta* Plum., *Cibicides pigneyi* (Hantk.), *C. aralensis* sp. n., *C. spp.*, *Pullenia* sp., *Globigerina bulloides*

Orb., *G. pseudobulloides* Orb., *G. triloculinoides* Plum., *Globigerinella micra* (Cole), *Virgulina schreibersiana* Cziz., *Bulimina mitgarziana* Balakh., *Hopkinsina compacta* Balakh., *Uvigerina botryoides* (Balakh.), *U. aff. bykovae* (Balakh.), *U. sp.*

Радиолярии представлены следующими формами: *Cenosphaera kuschari* Lipm., *C. aff. turcmenica* Lipm., *C. kisilkumensis* Lipm., *C. spp.*, *Spongurus biconstrictus* Lipm., *Cenodiscus lenticularis* Lipm., *C. ex gr. karakalpakensis* Lipm., *Sethodiscus lenticularis* Lipm., *Porodiscus turgaicus* Lipm., *P. sp.*, *Spongodiscus umbonatus* Lipm., *Stylodictya tschujenkoi* Lipm., *Amphibrachium isendaensis sp. n.*, *A. gracilis* Lipm., *A. bacillum sp. n.*, *Amphimenium romboides sp. n.*, *Spongasteriscus gorskii* Lipm., *S. aff. gorskii* Lipm., *Spongaster asiaticus sp. n.*, *Sethocyrtis aff. tamdiensis* Lipm., *S. aff. minimus* Lipm., *Lichnocanium sp.*, *Theocorys krischtofovichi* Lipm., *Eucyrtidium septatum* Lipm.

Четвертый комплекс содержится в коричневатых кварцевых песчаниках с нуммулитами и очень близок по своему составу первому комплексу. Из него определены: *Cristellaria laticostata* Tutkov., *Alabamina obtusa* (Burro et Holl.), *Eponides jacksonensis* Cushman., *Asterigerina sp.*, *Anomalina amphiphila* Gumb., *A. ex gr. acuta* Plum., *A. ex gr. danica* (Brotz.), *A. sp.*, *Cibicides eoceanus* (Gumb.), *C. perlucides* Nuttall, *C. praeperlucides* Nikit., *C. pseudoperlucides* N. Byk., *C. infraferganensis* N. Byk., *C. aralensis sp. n.*

Таким образом, в разрезе мыса Изенды-Арал в нижнелютетских нуммулитовых известняках и в песчаниках с нуммулитами содержатся почти одинаковые комплексы мелких фораминифер с преобладанием видов группы *Cibicides eoceanus* (Gumb.), а в промежуточных глинах — комплекс фораминифер и радиолярий с преобладанием видов *Bulimina mitgarziana* Balakh. и *Spongurus biconstrictus* Lipm. Эти отличия в составе микрофауны являются фацialsными. Виды фораминифер и радиолярий, перечисленные для тонколистватых глин, являются типичными для среднеэоценовых отложений нижней части тасаранской свиты Северного Приаралья и Тургайского прогиба и были мною неоднократно встречены в разрезах синклинальных прогибов этой территории, в частности в скважинах: Чаграйского плато (скважина № 64, глубина 87,25—139,20 м), в поселке Тумалыколь (№ 62, 77,65—159,45 м), у оз. Тебез (№ 46, 215,50—350,55 м), в г. Челкаре (№ 45, 235,00—365,6 м), в пос. Тургай (№ 1, 169,00—277,9 м) и в нескольких скважинах, пробуренных в Ащисайском районе. Можно попутно отметить, что в стратотипическом разрезе тасаранской свиты на г. Тас-Аран, указанный комплекс фораминифер и радиолярий отсутствует. Это является следствием того, что в антиклинальном разрезе на г. Тас-Аран тасаранская свита представлена только своей верхней частью, по возрасту соответствующей верхнеэоценовым отложениям, тогда как нижняя часть тасаранской свиты (среднеэоценовая) там отсутствует.

По содержащимся в ней комплексам мелких фораминифер и радиолярий нижняя часть тасаранской свиты хорошо сопоставляется с алайским ярусом Средней Азии. В свою очередь, алайский ярус является аналогом зон *Acarinina crassaformis* и *Truncorotalia aragonensis* Северного Кавказа⁽³⁾.

Изучение состава микрофауны нуммулитовых слоев приводит к следующим выводам:

1. Микрофауна известняков и песчаников мыса Изенды-Арал очень близка; отличия ее в промежуточных слоях — фацialsные.

2. Нуммулитовые слои по мелким фораминиферам, а промежуточные между ними глины по фораминиферам и радиоляриям сопоставляются с глинистой фацией низов тасаранской свиты и с алайским ярусом Средней Азии.

3. На Северном Кавказе нуммулитовым слоям мыса Изенды соответствует зона *Acarinina crassaformis* и *Truncorotalia aragonensis*.

4. Следовательно, обе названные зоны северо-кавказского палеогена а не только вторая из них, как думали до сих пор, соответствуют нижнему лютету.

Всесоюзный научно-исследовательский
геологический институт

Поступило
5 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. W. A b i c h, Mém. Acad. Sci., VI ser., 7, (9), St.-Petersb., 1858. ² А. И. Б у т а к о в, Вестн. Русск. геогр. общ., 7 (1853). ³ Н. К. Б ы к о в а, Тр. Всесоюзн. на-
учно-иссл. геол.-разв. нефт. инст., в. 136, сборн. 10 (1959). ⁴ Н. Н. С у б б о т и н а
Тр. Всесоюзн. научно-иссл. геол.-разв. нефт. инст., нов. сер., в. 34 (1949). ⁵ А. Л. Я н
ш и н, Геология Северного Приаралья, 1953.

А. Д. МИКЛУХО-МАКЛАЙ

НЕКОТОРЫЕ ДЕВОНСКИЕ ВОДОРОСЛИ СРЕДНЕЙ АЗИИ
И ДРУГИХ ОБЛАСТЕЙ СССР И ИХ ПОРОДООБРАЗУЮЩЕЕ
И ПАЛЕОГЕОГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

(Представлено академиком Д. В. Наливкиным 3 XI 1960)

На протяжении последних 12 лет автор имел возможность ознакомиться с большим количеством девонских органогенных карбонатных пород. Из них было изготовлено более 3500 шлифов. Эти породы в значительной своей части были собраны различными геологами, изучавшими геологическое строение Средней Азии, Кавказа, Урала, Казахстана, Алтая и окраин Кузнецкого бассейна. Личные сборы автора относятся к территории Средней Азии и отчасти Кавказа. Наибольший материал был получен из Средней Азии, особенно из различных районов южного обрамления Ферганы — Алайского и Туркестанского хребтов. Несколько меньше данных было добыто из областей, расположенных севернее Ферганской впадины, в Тянь-Шане, и еще меньше из более южных районов — из Памира. Водоросли были обнаружены во всех районах развития девонских пород, причем подавляющем большинстве случаев они были встречены в верхнедевонских, гораздо реже в среднедевонских и в единичных случаях в нижнедевонских известняках. Поэтому излагаемое ниже будет в основном касаться водорослей позднего девона.

В результате систематизации имеющегося в распоряжении автора материала было установлено, что в породах указанного возраста главнейшими породообразователями являются мшанки, затем обычно водоросли или кипечнополостные (кораллы и строматопороидеи). В таксономическом отношении все водоросли, обнаруженные в девонских образованиях Средней Азии и других районов, распределяются между 9 родами, относящимися к синезеленым водорослям (*Epiphiton* Bornemann, 1887, *Girvanella* Nicholson et Etheridge, 1878, *Ortonella* Garwood, 1914, *Yzhella* Antropov, 1955, *Renalcis* Vologdin, 1932, *Chabakovia* Vologdin, 1932), харовым (*Umbellaria* Maslov, 1949?), сифонниковым (*Lancicula* Maslov, 1956, *Rhabdoporella* Holley, 1893). Каждый из перечисленных родов представлен небольшим числом видов. Необходимо отметить, что систематическое положение перечисленных микроводорослей не всеми исследователями трактуется одинаково; так, например, представители рода *Umbellaria* многими палеонтологами относятся к фораминиферам — клагенидам (², ⁷, ¹⁰) и др.). Однако сравнение морфологии умбелл с харовыми водорослями, приуроченность их в палеозое к осадкам, формировавшимся, по-видимому, в условиях ненормальной солености, позволяют, как кажется, считать, что их следует, скорее, относить к харовым, точнее к трохилискам. Вопрос этот, однако, требует еще дальнейшего изучения.

Географическое распределение перечисленных водорослей довольно специфично. В Южно-Ферганской полосе (Алайско-Туркестанской) в верхнедевонских породах наибольшее распространение имеют ижеллы, ренальцисы, хабаковии, несколько меньше — эпифитоны и гирванеллы, еще реже здесь встречаются умбеллы. Хотя умбеллы по сравнению с другими водорослями

и редки, но они иногда образуют довольно значительные скопления, и не которые известняки поэтому заслуживают наименования умбелловых. Наиболее широко распространены в верхнем девоне Алайского и Туркестанского хребтов ижееллы, ренальцисы, хабаковии и эпифитоны, пока что неизвестны в Тянь-Шане. Однако нет полной уверенности, что эти водоросли действительно отсутствуют на указанной территории; возможно, что они из-за большой редкости просто пока не найдены. По имеющимся в настоящее время данным, в Тянь-Шане наиболее часто встречаются гирванеллы, ортонеллы и умбеллы, изредка ланцикуллы и рабдопореллы. На Памире, кроме немногочисленных остатков гирванелл, других водорослей не обнаружено. Интересно, что известняки верхнего девона на Памире довольно часто содержат тентакулитов, сравнительно редких в других районах Средней Азии. Любопытно, что, кроме гирванелл, не были обнаружены другие водоросли в большой коллекции верхнедевонских известняков из хр. Туар-Кыре.

Представители указанных здесь водорослей имеют в некоторых случаях самостоятельные ареалы распространения, в других же — виды двух родов образуют довольно постоянную ассоциацию. Так, например гирванеллы, умбеллы и ортонеллы ни разу не были встречены совместно, также ни в одном случае ланцикуллы не были обнаружены с видами только что перечисленных родов. Напротив, эпифитоны, ренальцисы, хабаковии и ижееллы, как правило, встречаются вместе, и нахождение представителей одного из указанных родов может быть индикатором нахождения одного или двух других. Вероятно, экологическая ассоциация синезеленых водорослей — *Epiphiton*, *Renalcis*, *Chabackovia*, *Yzhella* — представляет собой специфическое сообщество позднедевонских рифообразователей. Известняки с обильными остатками этих водорослей, как правило, относятся к более чистым их разностям, не содержащим примесей терригенного материала. Эти рифовые образования особенно характерны для Южной Ферганы. В этой же области имеются относительно более редко встречающиеся умбелловые и гирванелловые известняки, как правило содержащие довольно большое количество глинистых частиц. Породы последних двух типов в Тянь-Шане весьма обычны. В южных районах Средней Азии — в Гиссаре и на Памире — водоросли в породах интересующего нас возраста видимо, вообще редки. В Кызыл-Кумах, Туар-Кыре и Закавказье пока что известны только гирванеллы, при этом в последней области они особенно обильны. В Закавказье особенно интересны брахиоподово-гирванелловые известняки, в которых створки брахиопод сплошь покрыты густым слоистым сплетением между собой трубочек гирванелл. Очень характерную ассоциацию образуют водоросли позднедевонского времени в различных районах Татарии и Удмуртии. По данным И. А. Антропова (4), водоросли верхнего девона на востоке Русской платформы относятся к немногим родам и видам. Сравнение видов, описанных И. А. Антроповым, с найденными автором в позднем девоне Южной Ферганы показывает их полное сходство. Действительно, такие широко распространенные в верхнем девоне Татарии виды как *Yzhella nubiformis* Antr., *Epiphiton buldyricus* Antr., *Girvanella duc* Weh., имеют большое распространение в тех же породах и в Южной Ферганы. Можно отметить, что подобный же состав водорослей, как и в сравниваемых двух областях, имеется в тех же образованиях и на Урале.

Другая ассоциация водорослей характерна для позднедевонского времени Казахстана и Кузнецкого бассейна. Здесь очень типично весьма значительное развитие гирванелл, постоянное присутствие харовых — умбелл и спорадическое распространение некоторых сифонней. Интересно отметить присутствие в верхнедевонских известняках Кузбасса, помимо порою очень многочисленных гирванелл, также и ренальцисов, неизвестных пока в Тянь-Шане и в Казахстане.

Изложенное позволяет заключить, что водоросли девона довольно отчетливо могут быть разделены на две группы: 1) широко и равномерно распространенные на больших площадях (гирванеллы и, вероятно, умбел-

лы), на расселение которых не оказывало существенного влияния изменений общих условий среды; б) локальные (эпифитоны, ижеллы, ренальцисы и некоторые другие), сильно зависившие от местных особенностей физико-географической среды и имевшие прерывистые ареалы распространения. Первые, несмотря на свое весьма большое распространение, обычно не образуют массовых скоплений, тогда как вторые, не встречающиеся на большом протяжении, местами образуют очень значительные массы, слагаая известняки рифового типа. Очевидно, что среди водорослей главными рифообразователями были представители таких родов синезеленых, как *Erihiton*, *Renalcis*, *Chabackovia* и *Yzhella*. Иногда к этим водорослям присоединяются и гирванеллы, постоянно присутствующие в девонских рифовых известняках. Неясным остается вопрос: можно ли рассматривать как рифообразователей харовые водоросли, — однако роль их как породообразователей не подлежит никакому сомнению. Другие водные растения в девонских породах встречаются относительно мало, и их значение в породообразовании нельзя считать выясненным.

Отмеченная выше локализация водорослевых комплексов позволяет выяснить некоторые палеогеографические особенности морских бассейнов. В общем с юга на север на рассмотренной территории вырисовываются три фитогеографические провинции:

1) Закавказская, охватывающая юг Большого Кавказа, Закавказье, Туар-Кыр и Памир, для которой характерна в общем бедная родами и видами ассоциация водорослей, среди которых доминируют гирванеллы;

2) Урало-Ферганская, охватывающая восток Русской платформы, Урал и Алайско-Туркестанскую зону Средней Азии, с широким развитием разнообразных водорослей, особенно рифообразователей — эпифитон, ренальцис, ижелла и др.;

3) Тянь-Шаньско-Казахстанская, охватывающая Тянь-Шань, Казахстан и, вероятно, Кузнецкий бассейн, со значительным распространением гирванелл и умбелл; по-видимому, умбелловые известняки здесь столь же типичны, как эпифитоново-ижелловые для предыдущей провинции.

По всем данным, рассмотренные водоросли были весьма мелководными. Поэтому по их распространению можно судить не только об относительных глубинах морского бассейна, но и о составе морских вод и температуре. Особенно чутко реагировали на глубину и температуру водоросли. Отсюда очевидно, что изучение систематического их состава, а также морфологии и распространения имеет едва ли не главное значение при установлении зональности распределения органических форм в древних водоемах. Интересно в этой связи отметить, что резкое противопоставление «платформенных» и «геосинклинальных» (платформенных и уральских ⁽²⁾) ассоциаций фораминифер не находит подтверждения в изученном материале по распределению водорослей и фораминифер. Лагенидовый комплекс фораминифер — типично платформенный по Е. В. Быковой — был обнаружен автором не только в Туар-Кыре ⁽¹¹⁾, но и на Урале (р. Ай) и в Средней Азии (Ю. В. Фергана, р. Ак-бура).

Характеризуя водоросли девона в целом, нельзя не отметить резкое преобладание среди них синезеленых и относительно слабое развитие сифонниковых водорослей. Это дает основание предполагать, что в девонское время морские воды имели несколько пониженные температуры по сравнению с предыдущим силурийским и последующим каменноугольным периодами ⁽⁹⁾.

Оценить стратиграфическое значение водорослей девона в настоящее время довольно трудно, ибо этот вопрос требует дополнительного изучения. Однако уже теперь можно сказать, что некоторые водоросли являются специфическими девонскими, — по-видимому, умбелловые известняки столь же характерны для данного периода, как, например, амфипоровые или тентакулитовые.

В заключение следует указать на удивительный факт большого сходства водорослей позднего девона с комплексом кембрия. Это особенно отчетливо бросается в глаза, если учесть, что пять из девяти родов, едва ли не самых распространенных в девоне, весьма многочисленны и в кембрии: а роды *Eriphiton*, *Renalcis* и *Chabaskovia* считались до сих пор руководящими для кембрия. В ордовике и силуре эти роды пока неизвестны. Естественно, что сказанное позволяет говорить о двух максимумах развития синезеленых водорослей — в кембрии и в позднем девоне. Причины расцвета в позднем девоне некоторых «кембрийских» водорослей, вероятно, связаны с общим сходством физико-географической обстановки в эти периоды.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
29 VI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. А. Антропов, Уч. зап. Каз. гос. унив. им. В. И. Ульянова-Ленина, 115 кн. 8 (1955). ² Е. В. Быкова, Тр. Всесоюз. научно-иссл. геол.-разв. нефт. инст. нов. сер., в. 89 (1955). ³ А. Г. Вологдин, Археопияты Сибири, в. 1 (1931). ⁴ А. Г. Вологдин, Археопияты Сибири, в. 2 (1932). ⁵ К. Б. Корде, Тр. Палеонтол. инст. АН СССР, 6 (1955). ⁶ Е. Л. Кулик, ДАН, 112, № 3 (1956). ⁷ О. Г. Липина, Тр. Инст. геол. наук АН СССР, в. 119 (1950). ⁸ В. П. Маслов, Тр. Инст. геол. наук АН СССР, в. 160 (1956). ⁹ А. Д. Миклухо-Маклай, Вестн. Ленингр. гос. унив., № 2 (1951). ¹⁰ Е. А. Рейтлингер, Палеонтол. сборн., в. 1, 1954. ¹¹ А. Б. Вистелиус, А. Д. Миклухо-Маклай, В. Н. Рябинин, ДАН, 90, № 2 (1953).

И. М. ХОРЕВА и Р. Е. ГИТЕРМАН

НОВЫЕ ДАННЫЕ О РАСЧЛЕНЕНИИ ТРЕТИЧНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ В НИЖНЕМ ТЕЧЕНИИ АЛДАНА

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 26 XI 1960)

В нижнем течении р. Алдана третичные отложения были впервые обнаружены В. Н. Зверевым⁽⁴⁾. До самого последнего времени специально они никем не изучались. Только благодаря буровым работам Якутского Геологического управления было выявлено, что третичные отложения имеют здесь широкое распространение и большую мощность (до 700 м). На геологической карте масштаба 1 : 1000000 третичные отложения уже сравнительно подробно расчленены⁽²⁾. Материалом для данной статьи послужили полевые и лабораторные исследования авторов, были использованы также литературные данные.

В течение ряда лет в долине р. Алдана проводились исследования по стратиграфии главным образом четвертичных отложений. Но и из третичных отложений были отобраны образцы для спорово-пыльцевого анализа и собрана большая коллекция макроскопических остатков флоры, обработанная Ю. М. Трофимовым.

В нижнем течении р. Алдана третичные отложения вскрываются в ряде разрезов. Самые древние из них представлены темно-серыми и сильно железненными каолинистыми песками с большим количеством прослоев и линз растительных остатков. Эти отложения выходят в цоколе обнажения Мамонтовой горы, располагающегося на левом берегу р. Алдана, в 50 км выше устья р. Татты, а также в основании обнажения, находящегося в 21 км ниже устья р. Татты. Из них собрано большое количество плодов *Juglans cinerea* L. и шишек, среди которых определены: *Pinus spinosa* Herbst., *P. paleostrobus* (Ett) Heer (?), *P. thomasi*ana. Это свидетельствует о достаточно древнем, возможно олигоценовом, возрасте осадков. В состав полученных спорово-пыльцевых спектров входят: *Cedrus*, *Podocarpus*, *Myrtaceae*, *Cupressaceae*, в большом количестве встречается пыльца различных видов сосен. Пыльца *Betula*, *Alnus*, а также листопадных широколиственных пород составляет незначительный процент. Пыльцы *Tsuga* в этих спектрах почти не было.

Присутствие в спектрах пыльцы средиземноморского рода *Cedrus*, форм характерных для южного полушария — рода *Podocarpus* и сем. *Myrtaceae* и незначительное содержание пыльцы родов голарктических и североамериканских подтверждает олигоценовый возраст отложений.

Подобные спорово-пыльцевые спектры были обнаружены А. Н. Сладковым в отложениях мыса Кангаласский камень*. В темно-серых плотных песках, лежащих на нижнемеловых отложениях, найдена пыльца: *Pinus*, *Picea*, *Tsuga*, *Cedrus*, *Corylus*, *Carpinus*, *Ostrya*, *Pterocarya*, *Liquidambar* etc.

Стратиграфически выше олигоценовых отложений располагаются светло-серые и серые пески, слабо каолинизированные. Они вскрыты скважиной на левом берегу р. Лены, ниже г. Якутска, в районе с. Намцы. Образцы, взятые из нижней части скважины, пыльцы не содержали, и

* Этот разрез располагается на левом берегу р. Лены, в 30 км севернее г. Якутска.

лишь в верхней ее части, в интервале глубин 35—120 м, было найдено большое количество пыльцы.

В полученных спорово-пыльцевых спектрах встречается пыльца нескольких видов сосен, ели из секций *Omorica*, *Euricea*, пихты, возрастает содержание пыльцы *Tsuga*, березы и ольхи, а также листопадных широколиственных пород. Полностью исчезают *Cedrus*, *Podocarpus*, *Myrtaceae*. Такой состав флоры свидетельствует о более молодом, по-видимому миоценовому возрасту изученных осадков.

В разрезе Мамонтовой горы на олигоценовых отложениях лежат светлые серые пески, мощностью до 40—45 м. Спорово-пыльцевые спектры этих отложений характеризуются значительно меньшим разнообразием форм в сравнении с олигоценовыми спектрами. В составе голосеменных преобладают пыльца сосны, принадлежащей в основном секции *Centraea*, возрастает содержание пыльцы ели секции *Euricea*, пихты, лиственницы, пыльца *Tsuga* достигает 40%. Покрытосеменные представлены в основном пылью *Betula*, *Alnus*, процент пыльцы широколиственных пород несколько сокращается и уменьшается их разнообразие. Значительно возрастает содержание пыльцы травянистых растений. Поэтому возраст отложений можно считать миоценовым.

Среди макроостатков встречаются: *Pinus monticola* Dougl., *Pinus spinosa* Herbst., *Pinus radiata* Dougl., *Pinus paleostrobus* (Ett) Heer (?), единичные плоды *Juglans cinerea*. Но всех этих остатков значительно меньше, чем в нижележащих песках. Они могут быть здесь в значительной степени переотложенными.

В долине р. Тумары (правого притока р. Алдана) в 30—40 км выше устья вскрываются пески, из которых были взяты образцы на спорово-пыльцевой анализ. В нижней части этого разреза были обнаружены плоды *Juglans cinerea* шишки: *Pinus monticola*, *Pinus spinosa* Herbst. В верхней части плоды *Juglans cinerea* L., шишки *Pinus monticola* Dougl., *Pinus spinosa* Herbst. и шишки *Picea obovata* Ldb. По мнению Н. П. Куприной⁽⁵⁾, описавшей этот разрез, все указанные находки позволяют относить эти отложения к плиоцену. Полученные спорово-пыльцевые спектры это подтверждают. По сравнению со спектрами более древних отложений они отличаются обедненным составом. Голосеменные представлены сосной, елью; содержание пыльцы *Tsuga* не превышает 8%. В составе покрытосеменных преобладают береза и ольха; содержание пыльцы широколиственных пород очень невелико (до 10%). Экзоты, характерные для более древних отложений, отсутствуют. Значительный процент составляет пыльца травянистых растений.

В нижнем течении р. Алдана, на правом его берегу, в 30 км выше устья в основании Чуйского обнажения выходят серые местами ожелезненные пески, разнородные, косослоистые. Мощность их 10—12 м. В этих отложениях была найдена пыльца *Pinus*, *Picea*, *Betula*, *Abies*, *Alnus*, *Tsuga*, *Pterocarya*, *Quercus*, *Ulmus*, *Juglans*.

Основываясь на палеокарпологических и палинологических определениях главным образом М. Н. Караваева и А. И. Поповой, Р. А. Биджиев, Г. Ф. Лунгерсгаузен, Г. К. Земскова и др.⁽²⁾ считают флористически характеризованные толщи, вскрывающиеся в обнажениях приустьевых участков р. Алдана стратиграфическими аналогами Мамонтовой горы. Вместе с тем они же отмечают присутствие в составе собранных остатков в разрезе нижнего течения р. Алдана *Picea jacutica* и *Picea obovata*, т. е. типичных представителей холодолюбивых четвертичных растительных сообществ. Здесь заключена флора, которая, конечно, отличается от флоры Мамонтовой горы, и отождествлять их нельзя. Учитывая еще стратиграфическое положение осадков, можно возраст их предположительно считать плиоцено-эоплейстоценовым.

Данные бурения показывают, что третичные отложения широко развиты как на левом берегу, в низовьях р. Алдана, так и на правом. В первом случае они достигают мощности 500 м, во втором 700 м. Ничего подобно

не наблюдается в среднем течении, где третичные отложения приурочены к высоким 100—160-метровым террасам, и мощность их незначительная.

Таким образом, в нижнем течении р. Алдана имеется довольно полный разрез третичных отложений. Накопление мощной серии осадков здесь связано с тем, что долина приурочена к юго-восточному окончанию Приверхо-анского краевого прогиба, о строении которого известно из работ О. М. Пущаровского ⁽⁶⁾. Очевидно, прав Р. А. Биджиев ⁽¹⁾, который считает, что в низовьях р. Алдана следует выделить молодую структуру — Нижне-Алданскую впадину. Остается не совсем ясным, каким образом автор представляет строение этой впадины.

Анализ всех имеющихся материалов позволяет считать, что Нижне-Алданская впадина построена точно так же, как и Приверхоанский краевой прогиб. По бортам впадины выходят древние олигоценовые отложения, которые к центру сменяются молодыми (миоплиоценовыми и плиоцен-эоплейстоценовыми). Полученные спорово-пыльцевые спектры отложений Нижне-Алданской впадины подтверждают сделанные выводы о стратиграфии формирующих ее осадков. Детальный анализ элементов флоры, входящих в состав этих спектров, позволил наметить ряд интересных закономерностей ⁽³⁾. Современные ареалы этих родов можно разбить на следующие ботанико-географические группы:

1. Роды широко распространенные, ареалы которых находятся в пределах голарктической ботанико-географической области. Сюда относятся: *Betula*, *Alnus*, *Picea*, *Abies*, *Larix*, *Pinus*, *Salix*.

2. Североамериканско-евроазиатские роды *Tilia*, *Carpinus*, *Ilex*, *Fagus*, *Corylus*, *Quercus*, *Ulmus*.

3. Североамериканско-восточноазиатские *Tsuga*, *Carya*, *Nyssa*.

4. Средиземноморские *Cedrus*.

5. Американско-средиземноморско-восточноазиатские *Celtis*, *Castanea*, *Liquidambar*, *Ostrya*, *Cupressus*, *Rhus*, *Juglans*.

6. Восточноазиатские *Zelkova*, *Pterocarya*.

7. Палео-неотропическо-австралийские *Podocarpus*.

Если рассматривать состав полученных спорово-пыльцевых спектров, то можно проследить появление одних элементов и смену их другими ботанико-географическими элементами (табл. 1). В наиболее древних спектрах

Таблица 1*

Соотношение группы родов в третичных отложениях нижнего течения р. Алдана, объединенных общностью их современного географического распространения

Местонахождение разрезов	Возраст	Группы родов						
		голарктические	североамериканские — североазиатские	североамериканские — восточноазиатские	средиземноморские	американско-средиземноморские — восточноазиатские	восточноазиатские	палео-неотропическо-австралийские
р. Тумара	Плиоцен-эоплейстоцен	6	3	1	—	2	1	—
Мамонтова гора верх низ	Мио-плиоцен	7	6	2	—	3	1	—
		8	4	3	—	6	2	—
Намская свита	Миоцен	8	7	4	—	7	2	—
Таттинское обнажение	Олигоцен	5	3	1	1	2	—	2

* Цифры означают число родов, относящихся к данной группе.

присутствуют средиземноморский род *Cedrus* и роды, характерные для южного полушария *Podocarpus* и неопределенный род из сем. *Myrtales*. Родов голарктических здесь немного, по сравнению с лежащими стратиграфически выше горизонтами, также мало еще родов, относящихся к североамериканским и восточноазиатским группам.

Следующий этап в развитии флоры характеризуется расцветом голарктического элемента, а также возросшим участием североамериканского и восточноазиатского. В дальнейшем происходит постепенное обеднение состава флоры: выпадает часть родов, относящихся в голарктической, североамериканской и восточноазиатской группам. В спектрах наиболее молодых (разрез на р. Тумаре) господствуют в основном голарктические роды.

Полученные данные свидетельствуют о значительных изменениях в составе флоры, происходивших за время формирования изученных осадков. Несмотря на это, все спорово-пыльцевые спектры отражают характер растительности Восточно-Сибирской провинции, для которой было типично раннее появление и господство элементов темнохвойной тайги, а также значительное участие в составе растительности мелколиственных пород березы и ольхи.

Геологический институт
Академии наук СССР

Поступило
25 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. А. Биджиев, ДАН, 111, № 2 (1956). ² Р. А. Биджиев, Г. Ф. Лунгерсгаузен и др., Государственная геологическая карта СССР масштаба 1 : 1 000 000, лист Р-52, Якутск, 1957. ³ Е. Д. Заклинская, Изв. АН СССР, сер. геол., № 1 (1958). ⁴ В. Н. Зверев, Изв. Геол. ком., 33, № 9 (1914). ⁵ Н. П. Куприн, ДАН, 121, № 6 (1958). ⁶ Ю. М. Пущаровский, Изв. АН СССР, сер. геол., № 5 (1955).

К. В. ФИЛАТОВ

СИЛИКАТНЫЕ ВОДЫ И ИХ МЕСТО В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГИДРОХИМИЧЕСКОЙ ЗОНАЛЬНОСТИ

(Представлено академиком Д. И. Щербаковым 22 VIII 1960)

При гидрогеологических исследованиях 1958—1960 гг. на территории среднего Приамурья среди грунтовых вод нами были выделены ультрапресные силикатно-гидрокарбонатные воды. Распространены они по периферии Амуро-Зей-Буреинской депрессии у областей питания, на высоких плато и водоразделах, в каолинизированных, аркозовых песках зейской свиты и в кварцево-полевошпатовой дресве предгорий, (рис. 1). Минерализация их в пределах от 0,05 до 0,1 г/л. В катионном составе преобладают щелочные металлы. Реакция вод слабокислая до нейтральной.

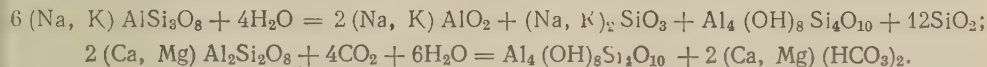
Аналогичные по составу природные воды неоднократно отмечались многими исследователями и ранее ^(2, 4-7).

В Монголии Н. А. Маринов ⁽⁵⁾ отметил ультрапресные кремнистые воды на высоких водоразделах Хангайского нагорья. В высокогорных районах Восточной Сибири в курумах, горных россыпях и коре выветривания массивнокристаллических пород ультрапресные воды с содержанием кремнекислоты до 20% от общей минерализации воды выделяются В. М. Степановым ⁽⁸⁾.

В. И. Духанина и др. впервые закартировали ультрапресные воды с концентрацией до 0,1 г/л, карбонатно-кремневые*, с большим содержанием органики ⁽⁷⁾, стр. 323). Эти воды в районах тундры севера и Кольского полуострова, вдоль побережья Баренцева моря, занимают полосу в несколько сот километров. Более полно содержание кремнекислоты изучалось в термальных, минеральных водах ^(6, 2).

Однако во всех этих случаях содержащаяся в водах кремнекислота в расчетную формулу химического состава не вводилась, и в гидрогеологических классификационных схемах и на картах класс силикатных вод гидрогеологами не выделялся. Полагали, что большая часть кремнекислоты вследствие слабой диссоциации находится в природных водах в коллоидной форме ⁽⁴⁾.

Известно, что кремнекислые растворы появляются в результате разложения и выветривания алюмосиликатов. В присутствии CO_2 и органических кислот в грунтовых водах щелочные металлы легко отщепляются из кристаллической решетки минералов и переходят в водный раствор в виде алюминатов и силикатов щелочей, а также в виде бикарбонатов щелочных земель по таким схемам:



Процесс выщелачивания кремнезема зависит от ряда факторов. Но форма нахождения и миграции кремнезема в природных водах остается нерешенной. В 1926 г. А. Е. Ферсман высказал предположение, что наряду с коллоидной наиболее распространенной формой SiO_2 является истинно растворенная. Для решения этого вопроса Е. С. Кабановой ⁽³⁾ проанализировано

* Разрядка наша. К. Ф.

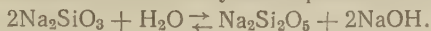
Таблица 1

№ п. п.	Место отбора пробы воды	Двуокись кремния		Химический состав по формуле Курлова
		валов.*	рас-твор.**	
1	Амуро-Зейский водораздел, родник в с. Натальино	21,4 0,67	19,7 90	$M 0,048 \frac{SiO_2 60 HCO_3 39}{Na 94 Mg 4 Ca 1} pH 6,7$
2	Амуро-Зей-Буреинская депрессия (среднее из 30 анализов грунтовых вод)	27,0 0,74	24,3 90	$M 0,126 \frac{HCO_3 46 SiO_2 34 Cl 10 SO_4 9}{Na 51 Ca 29 Mg 19}$
3	р. Гуран, Амуро-Зейский водораздел	21,4 0,67	19,3 90	$M 0,065 \frac{SiO_2 50 NCO_3 50}{Na 80 Mg 13 Ca 7} pH 6,6$
4	Ц. Казахстан, Богумбай, скв. № 32	13,4 0,34	12,0 90	$M 0,032 \frac{SiO_2 58 NCO_3 42}{Na 47 Mg 30 Ca 23} pH 7,7$
5	Казахстан, Рахмановский источник № 1	75,4 2,0	75,4 100	$M 0,160 \frac{SiO_2 61 HCO_3 25 Cl 18 SO_4 6}{Na 72 Mg 16 Ca 12} pH 9,2; t=40,6^\circ$
6	КНР, Хэй-хе, родник	32,1 0,85	28,8 90	$M 0,076 \frac{SiO_2 60 HCO_3 40}{Na 80 Ca 15 Mg 5}$
7	Амуро-Зейский водораздел, Черняево, родник	—	21,0	$M 0,064 \frac{SiO_2 50 HCO_3 50}{Na 87 Ca 7 Mg 6} pH 6,0$
8	р. Урга у Беловежа	50,5 1,33	45,4 90	$M 0,064 \frac{SiO_2 53 HCO_3 29 Cl 8}{Na 73 Ca 13 Mg 8} pH 7,3$
9	Ц. Казахстан, Богумбай, штольня № 4	46,5 1,19	39 84	$M 0,348 \frac{Cl 80 SiO_2 20}{Ca 63 Na 20 Mg 16} pH 6,7$
10	Туркмения, колодезь у разъезда № 42	10,4 0,26	10,4 100	$M 0,867 \frac{SO_4 52 Cl 14 HCO_3 24 SiO_2 2}{Na 41 Mg 32 Ca 26} pH 8$
11	Казахстан, Алмаарасан, скв. № 1	68 1,8	61,2 90	$M 0,206 \frac{SiO_2 47 HCO_3 39 SO_4 17 Cl 2}{Na 76 Ca 12 Mg 12} t=32^\circ$
12	Куйбышевский гидроузел, скв. № 2835	31,5 0,79	25,7 81	$M 13,041 \frac{Cl 97 HCO_3 2 SiO_2 0,2}{Na 81 Mg 16 Ca 2} pH 7,3$
13	Амуро-Зей-Буреинская депрессия, аллювиальный водоносный горизонт (среднее из 12 анализов)	27 0,7	20,4 83	$M 0,168 \frac{HCO_3 53 SiO_2 23 Cl 17 SO_4 7}{Ca 41 Na 39 Mg 20}$
14	Там же, цагайский водоносный горизонт (среднее из 16 анализов)	20 0,52	17 80	$M 0,179 \frac{HCO_3 78 SiO_2 18 Cl 2 SO_4 1}{Ca 45 Mg 31 Na 24}$
15	Невинномысский канал, подштоль-ненский участок	62 1,6	51 82	$M 12,634 \frac{Cl 96 HCO_3 3 SiO_2 1}{Na 36 Ca 34 Mg 30} pH 6,8$
16	Украина, Полесье, "шурф" № 1	18 0,46	18 100	$M 0,192 \frac{SO_4 72 SiO_2 23 HCO_3 5}{Na 66 Ca 27 Mg 7} pH 6,6$
17	Украина, Поляново-Косово	18,5 0,46	18,5 100	$M 0,817 \frac{HCO_3 96 SiO_2 4}{Na 94 Ca 4 Mg 1} pH 6,6$

* Над чертой — в миллиграммах на литр, под чертой — в миллиграмм-эквивалентах.

** Над чертой — в миллиграммах на литр, под чертой — в процентах от валовой.

могут дополнительно давать анион думетакремневой кислоты



Вместе с этими формами в воде всегда присутствует коллоидная кремне-кислота в виде гидрогеля $SiO_2 \cdot nH_2O$; между ними всегда имеются переходы.

Анализы природных вод показывают следующее (табл. 1).

1. Силикатные и силикатно-гидрокарбонатные воды характеризуются минерализацией не выше 0,1 г/л и могут быть названы ультрапресными (№№ 1—4).

2. Катионный состав их преимущественно натриевый (№ 4).

3. Реакция холодных вод — слабокислая; термальных — щелочная (№ 5).

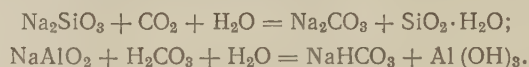
4. В силикатных водах хлориды и сульфаты почти отсутствуют (№№ 1, 4—8).

5. Увеличение содержания Cl и SO_4 с параллельным накоплением щелочных земель и повышением солености приводит к метаморфизации силикатных вод и замене их гидрокарбонатными, сульфатными и хлоридными (№№ 12—17). Процент коллоидной формы кремнезема увеличивается.

6. Стопроцентное содержание кремнезема в истинно растворенной форме встречается не только в щелочных, но и в кислых водах (№№ 16, 17). Класс силикатных и силикатно-гидрокарбонатных вод является начальным ти-

пом формирования природных вод. Поэтому в схеме горизонтальной гидрохимической зональности впереди класса гидрокарбонатных мы должны поставить класс силикатных вод.

Чистый тип этих вод в природных условиях встречается сравнительно редко и является устойчивым в гипергенной зоне при самых слабых концентрациях. По мере продвижения грунтовых вод в пониженные участки рельефа силикатные воды метаморфизируются в гидрокарбонатно-натриевые по схеме:

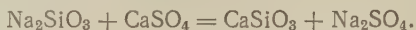


При дальнейшем движении грунтовых вод к областям аккумуляции формируются и гидрокарбонатно-кальциевые воды путем карбонизации крепкого негашеного извести:

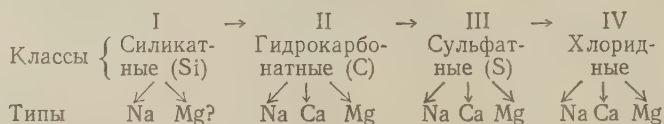


Для нас важно отметить, что и при этом процессе совершается переход силикатных вод в гидрокарбонатные, а щелочи заменяются Ca и Mg.

При наличии в породах гипса кремнекислые растворы переходят в сульфатно-натриевые воды по схеме:



Таким образом, наряду с гидрокарбонатными, сульфатными и хлоридными водами в схеме универсальной горизонтальной гидрохимической зональности мы считаем необходимым выделять класс силикатных вод. Тогда классификационная схема подземных вод по химическому составу примет такой вид:



В заключение хотелось бы рекомендовать гидрогеологам при анализе природных вод определять отдельно истинно растворенную часть кремниевой кислоты и вводить ее в расчетную формулу состава воды.

Совет по изучению производительных сил
Академии наук СССР

Поступило
15 VIII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. А. Алекин, Гидрохимия, М., 1948.
- ² В. В. Иванов, Геохимия, № 1 (1958).
- ³ Е. С. Кабанова, Канд. диссертация, Инст. геол. наук АН СССР, 1958.
- ⁴ В. А. Ковда, Тр. Почв. инст. АН СССР, 22, в. 1 (1940).
- ⁵ Н. А. Маринин, Сов. геол., Сборн. 56, 1956.
- ⁶ Е. В. Посохов, Термальные источники Восточной Казахстана, 1947.
- ⁷ А. Н. Семихатов, В. И. Духанина, Пояснительная записка к Инст. геол. и геогр. АН ЛитССР, научн. сообщ., 5, 1957.
- ⁸ В. М. Степанов, Тр. 2-го совещ. по подз. вод. в Вост. Сибири, в. 1, Иркутск, 1959.

Н. И. МЯЗЬ

К ВОПРОСУ О ПРОЦЕССЕ ПЕРЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ХРУСТАЛЕНОСНЫХ КВАРЦЕВЫХ ЖИЛАХ

(Представлено академиком Д. И. Щербаковым 24 XI 1960)

Исследования важнейшего жильного минерала — кварца представляют значительный интерес для выяснения некоторых особенностей минерогенетического процесса. С целью выявления структурных черт жильного кварца и исследования имеющихся в нем жидких включений нами был изучен ряд хрусталеносных месторождений Центрального Казахстана.

При просмотре под микроскопом жильного кварца в шлифах и в прозрачных полированных пластинках удалось установить, что существует зависимость между степенью катаклаза и перекристаллизации жильного кварца и характером хрусталеносности соответствующих кварцевых жил. Было выяснено, что катаклаз и перекристаллизация различны не только в кварцевых жилах разновозрастных месторождений (Соколов, Венедиктов, 1958), но и в одновозрастных жилах отдельно взятого месторождения. В результате оказалось возможным выделить следующие группы жильного кварца (рис. 1): жильный кварц с нормальным погасанием (а); 2) жильный кварц слабокатаклазированный, обычно с волнистым погасанием (б); 3) жильный кварц умеренно катаклазированный, часто с лоскутовидным погасанием (в); 4) жильный кварц сильно катаклазированный с незначительной перекристаллизацией (г); 5) жильный кварц очень сильно катаклазированный и в значительной мере перекристаллизованный (д, е). Все они связаны между собой постепенными переходами, и поэтому резких границ между соседними группами провести нельзя.

Не имея возможности в рамках краткого сообщения остановиться на подробной характеристике структур жильного кварца, мы приводим сводную таблицу изученных месторождений, из которой видно, что качество кристаллов горного хрусталя находится в прямой зависимости от степени перекристаллизации (табл. 1).

Основные выводы, полученные в результате изучения жильного кварца, сводятся к следующему:

1. Наиболее ранним образованием во всех кварцевых жилах является сливной жильный кварц, интенсивно катаклазированный в результате многократных тектонических подвижек, о чем свидетельствует наличие катакlastической и blastoцементной структур, наблюдаемых под микроскопом. Этот жильный кварц в результате катаклаза и одновременной деятельности гидротермальных растворов перекристаллизован, в итоге чего образовался плотный агрегат мелких, большей частью изометрических зерен, в массе своей лишенных жидких включений.

2. Формирование зернистого (в частности, крупнозернистого), шестоватого и друзового жильного кварца происходило, по всей вероятности, за счет частичного растворения и переотложения сливного жильного кварца.

3. Процесс перекристаллизации продолжался в ходе отложения шестоватого и друзового жильного кварца, а также во время формирования гнезд

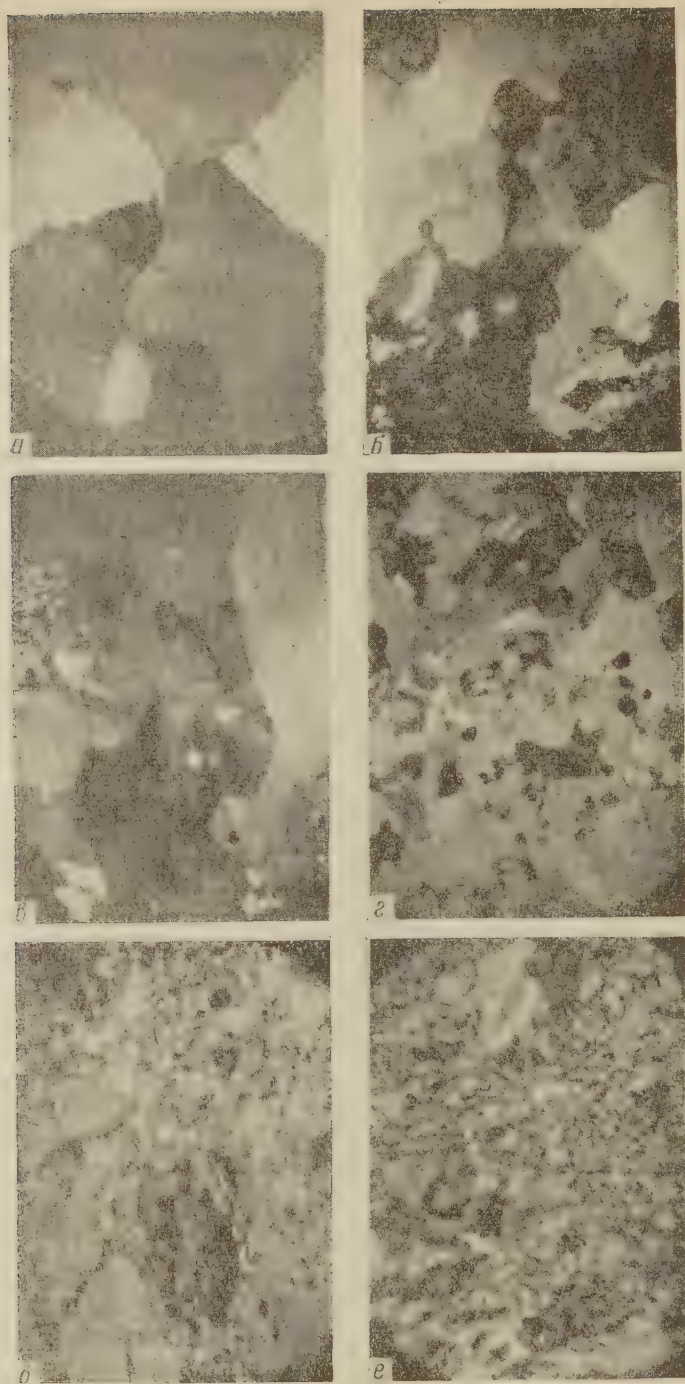


Рис. 1

с горным хрусталем, о чем свидетельствует наличие участков перекристаллизации не только среди крупнозернистого, но также шестоватого и друзового жильного кварца.

4. Проявления катаклаза по своим структурным признакам различны на разных жилах в пределах даже одного месторождения.

5. Катаклаз не является решающим фактором для перекристаллизации

Месторождение	№ жилы	Мощн./длина, м	Вмещающие породы	Степень катаклаза и перекристаллизация	Т-ра гомогениз. в жильч. кварце, °C	Качество кристаллов; габитус	Т-ра гомогениз. в кристалл. горн. жидк. включении, °C	Парагенетические минералы
Байконур	2 и др.	1—1,5/15—100	Гранодиориты	Очень сильный катаклаз и перекристаллизация		Хорошее		
Ащилы-Сай	Без номера	Мощная жильч. зона до 20/900	Песчаники	Катаклаз; перекристаллизации практически нет	240—40	Кондиционных кристаллов нет	160—40	Пирит, хлорит, кальцит
Актас II	55	до 40/300	Гранодиориты	Очень сильный катаклаз и перекристаллизация	240—40	То же	180—40	Хлорит, гематит, кальцит, пирит
	57	до 5 м	»	Сильный катаклаз; перекристаллизация частичная	200—40	Низкое; коротко- и длиннопризматический	180—40	Гематит, хлорит, кальцит, гаусманит
Актас I	32	до 2,5/до 40 м	»	То же		Низкое	170—40	
	29	до 3 м	»	Сильный катаклаз		Кондиционных кристаллов нет	160—60	
	15	до 0,6/до 100	»	Очень сильный катаклаз и перекристаллизация		Хорошее; короткопризматический	160—60	
	6	0,5/до 100	»	То же	220—40	То же	130—40	Хлорит, эпидот
Жильное поле III	42, 43, 48, 49, 50		Песчаники и конгломераты	Сильный катаклаз; перекристаллизация до значительной	180—60	Низкое; коротко- и длиннопризматический	160—40	
Карабайтам	12	до 1/100	Песчано-эффузивная толща	Очень сильный катаклаз; очень слабая перекристаллизация		Очень низкое; короткопризматический	170—60	
Котр	90	до 2/до 100	Кварцевые и аркозовые песчаники	Очень сильный катаклаз; перекристаллизация частичная	260—60	Хорошее; длинно- и короткопризматический	240—60	Пирит, хлорит
Шагырлы	14, 20	до 4/до 200	Песчаники, сланцы	Очень сильный катаклаз; перекристаллизация нет	240—110	Хорошее; короткопризматический		
		Ряд жил малой мощн.	То же			Кондиционных кристаллов нет		

жильного кварца, примером чего служит жила № 12 месторождения Карбайтам, где жильный кварц очень интенсивно катаклазирован, однако степень перекристаллизации незначительна.

6. Решающая роль при перекристаллизации принадлежит деятельности гидротермальных растворов. В то же время большая степень катаклаза жильного кварца бесспорно облегчала продвижение гидротермальных растворов по телу жилы.

7. Наиболее полно процесс перекристаллизации протекает, по-видимому, при поступлении порций гидротермальных растворов с минимальными прерывами во времени.

8. Чем выше степень перекристаллизации, тем интенсивнее проявлялась деятельность растворов с выщелачиванием кремнезема и высвобождение пространства, необходимого для образования хрусталеносных полостей.

9. В результате изучения и сопоставления структурных особенностей жильного кварца из различных месторождений с их промышленной ценностью (т. е. качеством и количеством горного хрусталя) можно сделать заключение, что продуктивность кварцевых жил пропорциональна степени перекристаллизации.

10. На основании изучения жидких включений можно сделать вывод, что формирование зернистого кварца происходило в следующем интервале температур в разных жилах: 1) в жиле № 3240—140°, 2) № 55 240—140°, 3) № 57 220—130°, 4) № 12 180—100°, 5) № 14 260—160°. Формирование шестоватого и друзового жильного кварца происходило при более низких температурах: 1) в жиле № 3200—60°, 2) № 55 220—60°, 3) № 57 200—60°, 4) № 12 160—40°, 5) № 14 240—60°.

11. Рост зернистого шестоватого и друзового жильного кварца происходил из пересыщенных гидротермальных растворов при пульсационном их поступлении на общем фоне спада температур. Растворы на некоторых жилах были насыщены хлоридами, о чем свидетельствует наличие трехфазовых жидких включений в жильном кварце из жил № 3 и № 55 месторождения Акташ II, где качество горного хрусталя самое высокое по сравнению с другими кварцевыми жилами Центрального Казахстана.

12. Наблюдениями в жидких включениях жильного кварца на разных месторождениях было установлено, что все включения гомогенизируются по первому типу, т. е. в жидкую фазу. Это обстоятельство позволяет сделать заключение о том, что рост зернистого, шестоватого и друзового кварца происходил за счет деятельности гидротермальных растворов.

13. Жильный кварц является очень чувствительным минералом в отношении проявления даже самых незначительных тектонических подвижек и скачков температуры, о чем свидетельствует множество трещин в жильном кварце и в кристаллах горного хрусталя. Наличие жидких двухфазовых включений в большинстве залеченных трещинок, гомогенизирующихся при температурах 180—120°, позволяет заключить, что сформировавшиеся из растворов были наиболее активны.

14. Однофазовые жидкие включения по трещинам в жильном кварце показывают, что незначительные подвижки наблюдались и после отложения кристаллов горного хрусталя.

Поступило
21 XI 1960

В. А. ЖАРИКОВ

КВАРЦЕВО-ПОЛЕВОШПАТОВЫЕ МЕТАСОМАТИТЫ В СКАРНОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЯХ

(Представлено академиком Д. С. Коржинским 29 X 1960)

Для многих скарново-редкометальных (Sn, Mo, W) месторождений — аких, например, как Майхура, Тырны-Ауз, Лянгар, — весьма характерен ослескарновый процесс кварцево-полевошпатового метасоматизма. Стадия варцево-полевошпатового метасоматизма широко проявлена во всех ородах скарнового поля и является главной рудной стадией, а потому — типической для этой группы месторождений *. Оруденение опровергает определенные фациальные разновидности кварцевополевошпатовых метасоматитов, образующиеся в особо благоприятных для удоосаждения вмещающих породах (скарнах) и во многом предопределяется общим характером проявления кварцево-полевошпатового метасоматизма в рудном поле.

Наиболее широко процесс кварцево-полевошпатового метасоматизма проявлен в гранитоидах, где он захватывает приконтактовые части массивов. Особенно охотно кварцево-полевошпатовые метасоматиты развиваются по апикальным частям, выступам, апофизам массивов, где они нацело замещают исходные гранитоиды. В результате гранитоиды преобразуются в лейкократовые метасоматиты, сложенные кварцем; кварцем и альбитом; кварцем, альбитом и калиевым полевым шпатом; кварцем, полевыми шпатами и мусковитом, иногда с турмалином (или хлоритом). Наблюдается определенное, зональное, расположение различных разновидностей метасоматитов. Для месторождения Майхура, например, устанавливается колонка метасоматических зон, характеризующаяся следующей сменой парагенезисов по мере увеличения интенсивности процесса: 1) исходный гранитоид; 2) кварц + альбит + ортоклаз + мусковит + хлорит (биотит), + магнетит, 3) кварц + альбит + ортоклаз + мусковит + турмалин (хлорит), 4) кварц + альбит + ортоклаз + мусковит, 5) кварц + альбит + ортоклаз, 6) кварц + альбит, 7) кварц. При этом зоны наибольшего изменения (5, 6 и 7) приурочиваются к определенным тектоническим элементам — приконтактовой поверхности, системам трещин, где фиксируются в виде зональных линз или жил нередко пегматоидного облика. Менее интенсивными изменениями (зоны 4 и 3) захвачены все приконтактовые части массива.

В других случаях (например, на Тырны-Аузе) в кварцево-полевошпатовые метасоматиты (зона 5) почти нацело преобразованы апофизы и выступы гранитного массива, а окварцевание (зона 7) носит штокверковый характер.

Постоянная приуроченность к приконтактовым частям массивов и залегание в виде тел, четко отграниченных от исходных гранитоидов, послужили в ряде случаев причиной ошибочного отнесения кварцево-полевошпатовых метасоматитов к самостоятельным интрузивным образованиям. Таковы, например, мусковитовые и турмалиновые граниты Майхуры, лейкократовые граниты Тырны-Ауза, аляскиты некоторых других месторождений.

* Среди скарново-редкометальных месторождений встречаются и другие типы, где оруденение скарнов связано с наложением процессов грейзенизации и даже березитизации.

Наложение на скарны процесса кварцево-полевошпатового метасоматизма выражается в образовании кварцево-полевошпатовых, кварцево-гранатовых (с характерным красным гранатом), кварцево-полевошпатово-гранатовых жил, в окварцевании, амфиболизации, иногда гранатизации, полевошпатизации и оруденении скарнов. В зависимости от состава скарновых пород процесс кварцево-полевошпатового метасоматизма выражен по-разному.

В близскарновых (скарнированных) гранитоидах и околоскарновых породах кварцево-полевошпатовый метасоматизм проявляется прежде всего в интенсивном окварцевании. При этом кислые плагиоклазы нередко сохраняются (с образованием олигоклазово-кварцевых и амфиболово-олигоклазово-кварцевых пород), тогда как основные плагиоклазы почти всегда замещаются кварцем. В результате вместо гранатово-плагиоклазовых и пироксеново-плагиоклазовых пород возникают гранатово-кварцевые, пироксеново-кварцевые и существенно кварцевые метасоматиты.

В пироксеново-гранатовых и особенно гранатовых скарнах хорошо выражены кварцево-полевошпатовые, главным образом кварцево-плагиоклазовые, иногда с гранатом жилы. Жилы нередко имеют зональное строение, когда сердцевина сложена кварцем, а зальбанды существенно плагиоклазовые, с отчетливыми структурами замещения скарнового граната плагиоклазом (обычно олигоклазового состава), иногда скарнового граната характерным красным гранатом стадии кварцево-полевошпатового метасоматизма. Метасоматические изменения не ограничиваются жилами (где они наиболее интенсивны), но нередко захватывают и всю массу скарнов, где наблюдается замещение пироксена кварцем или кварцем и амфиболом, граната — плагиоклазом, обычно с кварцем, иногда замещение скарнового граната красным гранатом с кварцем.

В пироксеновых (и волластонитовых) скарнах описываемый процесс выражается в интенсивном окварцевании, нередко амфиболизации и в образовании многочисленных кварцевых и кварцево-гранатовых жил. Последние часто зональны: сердцевина — кварц, зальбанды — красный гранат.

Рассмотренные различия в характере проявления кварцево-полевошпатового метасоматизма обусловлены различием в исходном составе пород. Подтверждение этому можно многократно наблюдать, прослеживая характер изменения около одной и той же кварцево-полевошпатовой жилы, пересекающей гранитоиды и все скарновые породы. Можно, таким образом, выделять различные фации кварцево-полевошпатовых метасоматитов в зависимости от состава исходных пород.

Совершенно однозначны соотношения кварцево-полевошпатового метасоматизма и оруденения. Исключительная приуроченность касситерита, вольфрамита, молибденита и других сульфидов к различным фациям кварцево-полевошпатовых метасоматитов и структурные соотношения минералов показывают, что отложение рудных минералов происходило в результате кварцево-полевошпатового метасоматизма одновременно с преобразованием благоприятных для рудоосаждения скарнов и околоскарновых пород.

Рассматривая изменения химического состава пород при кварцево-полевошпатовом метасоматизме, можно видеть одну общую тенденцию для всех фаций метасоматитов. Происходит последовательный вынос из пород, сначала двухвалентных, а затем и других оснований, с замещением в итоге кварцем всех минералов.

Такой характер реакций минералообразования свидетельствует о кинематическом составе растворов стадии кварцево-полевошпатового метасоматизма (1). Можно предполагать, что для данного типа месторождений, так же как и для многих других скарновых месторождений (2), одной из главных причин рудоотложения является понижение растворимости вследствие уменьшения кислотности при взаимодействии кислых растворов с основной средой скарновых пород.

Примечательной особенностью апоскарновых руд, также указывающих

а предопределяющее значение режима кислотности для рудоотложения, является избирательное размещение касситерита, молибденита и шеелита в пределах скарновых тел, обусловленное различной кислотофильностью элементов или соединений. Молибденит и касситерит — более кислотофильные минералы ⁽²⁾, т. е. такие, для образования которых благоприятны условия повышенной кислотности. Они и осаждаются в условиях более кислой среды — среди окварцованных околоскарновых пород, в зонах окварцевания, в кварцевых жилах среди скарнов и т. д. Шеелит — менее кислотофильный минерал — осаждается в условиях более основной среды, главным образом среди пироксена, амфибола, на внешнем фронте окварцевания.

Процесс кварцево-полевошпатового метасоматизма является, таким образом, типичным процессом приконтактового кислотного метасоматизма ⁽³⁾. Максимальной интенсивности кварцево-полевошпатовый метасоматизм достигает в контактовой зоне сравнительно крупных (в масштабах скарновых олей) массивов гранитоидов. По удалению от контактовой зоны (в том числе и в глубь массива) происходит уменьшение интенсивности и полное исчезновение изменений. Полностью измененные апофизы и приконтактовые зоны гранитоидов на глубину переходят в серию обособленных кварцево-полевошпатовых жил, которые еще ниже постепенно выклиниваются.

Кварцево-полевошпатовый метасоматизм относится к наиболее ранним процессам приконтактового кислотного метасоматоза, более ранним и более высокотемпературным, чем процесс грейзенизации. Это доказывается наложением мусковитизации с образованием вместо кварцево-полевошпатовых метасоматитов кварцево-мусковитовых грейзенов. Кварцево-полевошпатовый метасоматизм проявляется в условиях умеренных глубин, больших, чем необходимо для образования вторичных кварцитов. Первоначально казалось возможным рассматривать его как разновидность процесса грейзенизации. Последующие исследования показали, что кварцево-полевошпатовые метасоматиты: 1) имеют широкое распространение в скарново-редкометалльных и других редкометалльных месторождениях; 2) характеризуются четкой геологической позицией, особенностями состава и четкими возрастными соотношениями с грейзенами.

Это дает нам основание выделить кварцево-полевошпатовые метасоматиты в самостоятельную формацию кислотной стадии (стадия выщелачивания) ослеамагматического процесса ⁽³⁾. В зависимости от состава исходных пород других условий образования можно выделять различные фации кварцево-полевошпатовых метасоматитов: 1) кварцево-калишпатовую, 2) кварцево-альбитовую, 3) кварцево-плагиоклазовую и др.

Помимо скарновых месторождений кварцево-полевошпатовые метасоматиты обычны для жильных редкометалльных месторождений. Но наиболее широко процесс кварцево-полевошпатового метасоматизма проявляется в кварцево-микроклиновых и кварцево-альбитовых пегматитовых и пегматитовых образованиях.

Институт геологии рудных месторождений,
петрографии, минералогии и геохимии
Академии наук СССР

Поступило
25 X 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. С. Коржинский, Изв. АН СССР, сер. геол., № 12, 3 (1957).
В. А. Жариков, Международн. геол. конгресс, XXI сессия, Докл. сов. геологов, Борн. Генетические проблемы руд, 1960, стр. 38. ³ Д. С. Коржинский, Сборн. основные проблемы в учении о магматогенных рудных месторождениях, 1953, стр. 335.

Д. С. НИКОЛАЕВ, К. Ф. ЛАЗАРЕВ и С. М. ГРАЩЕНКО

КОНЦЕНТРАЦИЯ ИЗОТОПОВ ТОРИЯ В ВОДАХ АЗОВСКОГО МОРЯ

(Представлено академиком Н. М. Страховым 2 XII 1960)

Для выяснения геохимического поведения и форм нахождения изотопов тория в морских водах представляет большой интерес проследить этап его миграции в море. В 1958 г. нами была определена концентрация изотопов тория в водах Черного моря (1). В настоящем сообщении мы приводим результаты изучения содержания изотопов тория в водах Азовского моря.

Отбор проб, концентрирование и определение Th^{232} выполнены по той же методике, что и для Черного моря. Результаты определения тория в водах Азовского моря (рис. 1), исправленные на содержание тория в «холостых» пробах (0,2 — 0,3 γ Th на пробу), и выходы, определенные с помощью UX_1 (60 — 80%), приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ № стан-ций	Координаты станций		Объем пробы, л	Содержание Th		
	с. ш.	в. д.		γ в пробе	10^{-9} г/л	средн. ($\mu \cdot 10^{-9}$ г/л)
19	45°28'	35°47'	250	2,9	11	11±3
21	45°38'	35°38'	250	2,1	8	7±2
			270	1,6	6	
			250	0,7	3	
22	45°50'	36°11'	250	1,3	5	4±1
			270	1,0	4	
			250	1,4	6	
23	46°03'	36°42'	250	1,1	4	4±1
			270	0,9	3	
			250	5,3	21	
24	46°19'	37°23'	250	4,2	17	19±4
			270	5,8	21	
			250	51	204	
25	46°55'	37°57'	250	49	196	219±40
			270	69	256	
			500	4,8	10	
26	45°31'	37°23'	270	2,4	9	9±2

Из приведенных данных видно, что концентрация тория в водах Азовского моря изменяется в широких пределах (от $4 \cdot 10^{-9}$ г/л для станции №22 и 23 до $219 \cdot 10^{-9}$ г/л для станции №25), в то время как в исследованной части Черного моря она практически оставалась постоянной. Эти колебания, вероятно, связаны с наличием в воде Азовского моря довольно большого количества взвеси (2), сообщающей воде заметную при визуальном наблюдении опалесценцию. Количество взвеси в воде не постоянно и зависит от ряда факторов, таких как волновое взмучивание донных осадков, ветровой снос песка и пыли с берегов, вынос взвеси впадающими в море реками. Поэтому если концентрация тория в воде зависит от количества находящейся в ней взвеси, то она должна зависеть от условий и мест отбора проб. Полученные нами данные подтверждают это предположение.

Воды наименее загрязненные взвесью, отобранные в штилевое состояние

оря из его центральной части (станции №№ 22 и 23), содержат тория $4 \pm 1) \cdot 10^{-9}$ г/л, что характерно для открытой части Азовского моря. Концентрация тория в таких водах близка к концентрации в воде Черного моря. Прочие пробы характеризуют более загрязненные взвесью прибрежные воды Азовского моря.

Из табл. 1 видно, что по мере приближения к берегу содержание тория в воде несколько возрастает. Так, на станции № 21, расположенной примерно в 20 милях от берега, содержание тория повышается до $7 \cdot 10^{-9}$ г/л, а на станции № 19, удаленной всего на мили от берега, содержание тория снижается до $11 \cdot 10^{-9}$ г/л. Наблюдаемое повышение концентрации тория можно объяснить увеличением количества взвесей в прибрежной полосе, так как в ней явления волнового взмучивания проявляются интенсивнее. Дополнительным фактором, повышающим количества взвеси в водах прибрежной зоны, является ветровой снос пыли с берега.

Станция № 24 расположена в 3 милях от восточного берега, у начала мелководья между Таганрогским и Темрюкским заливами. Отбор пробы производился во время волнения, длившегося с переменной силой (2 — 4 балла) в течение нескольких дней. Это отразилось в повышении содержания тория до $19 \cdot 10^{-9}$ г/л.

Повышение содержания тория в воде наблюдается также в зоне впадения рек. Так, в воде Темрюкского залива (станция № 26), в который впадает Кубань, концентрация тория равна $9 \cdot 10^{-9}$ г/л. Особенно высокое содержание тория в воде было найдено на станции № 25, расположенной в средней части Таганрогского залива, принимающего, как известно, воды реки Дон. Отбор пробы здесь производился при свежей погоде (до 4 баллов). Здесь нами при отборе пробы отмечалась визуально наблюдаемая максимальная среди всех станций опалесценция воды. Естественно, что именно здесь содержание тория достигло максимальной величины $219 \cdot 10^{-9}$ г/л.

Для решения скорости седиментации, определения абсолютного возраста, миграции радиоэлементов и т. д. большой интерес представляет определение содержания в воде изотопов тория RbTh и I₀. Содержание этих изотопов удалось определить лишь в суммарной пробе, полученной путем объединения всех рабочих растворов после того, как в них было определено содержание тория. Эта объединенная проба была подвергнута дополнительной очистке от посторонних α-излучателей (полония) с помощью экстракции тория из азотнокислой среды раствором трибутилфосфата в бензоле с последующим отделением от остатков полония адсорбцией на ионите АВ-17. Содержание RbTh в этой пробе определялось эманационным методом по нарастанию ThX. Ионий определялся посредством измерения α-активности на установке типа ДА-49. В этой объединенной пробе повторно было определено также содержание Th. Ниже приводятся результаты этих определений, исправленные на выход UХ₁, геометрию, фон и содержание тория и иония в объединенной холостой пробе.



Рис. 1

Объем суммар- ной пробы в л	Найдено Th в γ	Найдено RbTh в ед. Th	Найдено I ₀ (n · 10 ⁻⁹ г)	RbTh/Th	I ₀ в % от равно- весного с содер- жащимися в воде U (2 γ/л)
4620	234	335	3,6	1,43	2

Следует отметить, что приведенные данные для объединенной пробы характеризуют главным образом воды станции № 25, т. е. воды с максимальной концентрацией тория и поэтому не могут быть использованы для вычисления средней концентрации изотопов тория в водах Азовского моря. Величина отношения $RdTh/Th = 1,43$ указывает на некоторые отличия в геохимическом поведении этих изотопов в Азовском море.

Отношение Io/U (в равновесных единицах), равное 2%, больше отношения, найденного нами ранее для вод Черного моря (0,7%) ⁽¹⁾, что, вероятно, можно объяснить приуроченностью части иония к взвешенному материалу, которым обогащены воды станции № 25.

Полученные данные по распределению тория в водах Азовского моря полностью подтверждают высказанное около тридцати лет назад В. И. Вернадским ⁽³⁾ предположение, что торий «где-то собирается, по-видимому, сорбцией в коллоидальных выделениях коры выветривания — собирается в илах, глинах, осадках источников» и что поэтому «надо искать торий в мутях, которыми проникнуты природные воды» ⁽⁴⁾.

Поступило
9 VII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Е. Старик, К. Ф. Лазарев и др., ДАН, 129, № 4, 919 (1958).
² Б. А. Скопинцев, Тр. Морск. гидрофиз. инст. АН СССР, 13, 113 (1958).
³ В. И. Вернадский, Избр. соч., 1, Изд. АН СССР, 1954, стр. 252. ⁴ В. И. Вернадский, Избр. соч., 1, Изд. АН СССР, 1954, стр. 642.

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

В. П. МАСЛОВ

НЕ ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ СИЦИДИИ И ХОВАНЕЛЛЫ
УТРИКУЛАМИ ХАРОФИТОВ?

(Представлено академиком Н. С. Шатским 13 VI 1960)

Работами последних лет получено много новых данных по морфологии анатомии плодоношений харофитов. Особенно много дали работы (¹⁻¹⁹). Как известно, у некоторых групп харофитов кроме обычной известковой оболочки (гирогонита), образованной спиральными клетками ооспорангия, присутствует вторая известковая наружная оболочка, или утрикул. Происхождение этой оболочки связывается с вегетативными частями растения, которые в виде пучка «веточек» окружали гирогонит. Сливаясь вместе и смыкаясь своими вершинами, они создавали утрикул. Начальные стадии образования такой оболочки можно наблюдать у *Echinochaeta* Peck и, может быть, у *Laginophora* Stache. Сливаясь вместе, «веточки» теряли свою форму, вместо них остались лишь рельефно выраженные валики, углубления и п., которые придают характерные морфологические черты поверхности трикула. Эти типичные черты мы находим у рода *Clavator* (рис. 1а). Наличие утрикула позволило выделить сем. *Clavatoraceae*, включающее несколько родов. Некоторые роды (*Atopochaeta* Peck) обладают также и известковыми гирогонитами, находящимися внутри утрикула, похожими на гирогониты рода *Laginophora* Stache и имеющими форму графина с узким дном. Гирогониты других родов сходны с сем. *Characeae*. Гирогониты сем. *Clavatoraceae* слабо обызвествлены в отличие от сильно обызвествленного трикула, имеющего толстые стенки. Утрикулы одного и того же вида представляют значительные вариации в форме, орнаментации и величине. Как пример такого полиморфизма приведем новый род третичного харофита, встреченного в нижнеолигоценовых отложениях с. Подгорного Староазачинского района Измаильской обл. УССР (скважина № 45, глубина 4,6 — 301,5 м). Этот материал был передан в мое распоряжение А. П. Пенькиной, за что выражаю ей свою признательность.

Необходимо отметить, что харофиты с утрикулами до сих пор в третичных осадках не встречались — все они юрские и меловые.

CHAROPHYTA. CHARALES. CLAVATORACEAE

Орган-род *Anomalochara* gen. n.

Мелкие, более или менее округлые утрикулы без признаков сутур, сущие на поверхности или многоугольные ямки, или в нижней части ступающие округлые ребра с широкими ложбинками между ними. Тип да *Anomalochara polymorpha* gen. et sp. n. из олигоцена юга Украины.

***Anomalochara polymorpha* gen. et sp. n.**

Рис. 1 и — н

Голотип: ГИН, № 45/294, нижний олигоцен с. Подгорного; юга Украины. Мелкие утрикулы величиной около 200 — 250 м, неправильной формы: несколько вытянутые или яйцевидные, или приближающиеся к сфере.

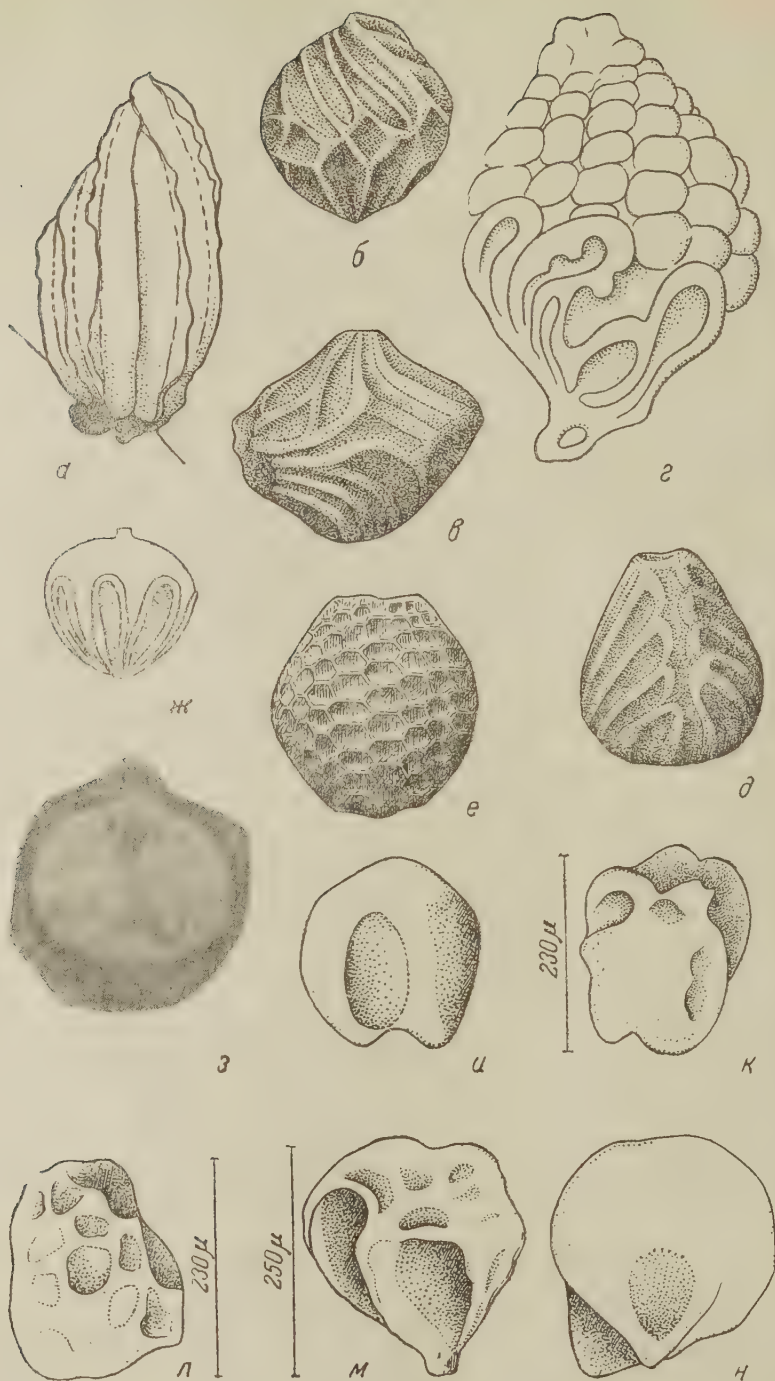


Рис. 1. Внешний вид сбоку: а — *Clavator reidi* Groves; б — *Atopochara trivolvus* Peck; в — *Perimneste corrugata* Peck; г — *Nodosclavator nodosus* (Peck); д — *Flabellochara harrisi* (Peck); е — *Sycidium panderi* Ehrenberg; ж — *Chovanella maslovi* Iarzewa; з — *Chovanella samoilovi* Reitl. et Jarz. — разрез; и — н — *Anomalochara polymorpha* gen. et sp. n. пос. Подгорное Старо-Казачинского района Измаильской области УССР, скважина № 45, глубина 294,6—301,5 м

поверхность их бывает либо совершенно гладкой, либо покрыта мелкими многоугольными или округлыми ямками, распределенными без особого порядка, или выступающими закругленными ребрами, сходящимися у большого отверстия в основании утрикула. Стенки утрикула толстые, гирогонит не обнаружен.

С р а в н е н и е. Утрикулы описываемого вида имеют отдаленное сходство с утрикулами некоторых видов рода *Clavator*, например с *Clavator inutus* Peck, ((¹⁹), p. 17 — 18, pl. 3, f. 23—24), из аптских отложений ЦА, но отличаются как своей величиной, так и полиморфизмом; кроме того, у *Anomalochara* чаще встречаются мелкие ямки (которых у клаватора бывает). У нового орган-рода также меньше развиты продольные элементы, типичные для рода *Clavator*. Правда, у одного вида — *Clavator nodosus* Peck. (¹⁹) — большая часть его поверхности покрыта бугорками, что придает ему внешнее сходство с початком кукурузы (рис. 12) и что придает как бы зеркальное отражение ямок, а нижняя часть несет своеобразную лепестковидную скульптуру. Мне кажется, что этот меловой вид, описанный Пэком, следует выделить в отдельный орган-род *Nodosoclavator*, который имеет мало общего с родом *Clavator*.

Утрикулы других родов того же семейства имеют как свои особенности, так и общие признаки, сближающие их между собой. Главным признаком является вторичность известковой оболочки утрикула, что обнаруживается несомненно, если под утрикулом встречен гирогонит. Другими признаками являются продольные элементы скульптуры (валики, борозды, вертикальное расположение бугров и ямок), являющиеся остатками вегетативных элементов, окружавших плодоношение. И, наконец, стенки утрикула отличаются от стенок гирогонита своей грубостью и слитностью и отсутствием швов, в то время как гирогонит имеет обычно швы между известковыми спиралями — продуктами выделения особых защитных клеток оболочки ооспорангия. Если мы сравним утрикулы меловых родов *Clavator* и вновь описанный орган-род *Anomalochara* между собой, а также девонскими сицидиями и хованеллами, то мы найдем у них некоторые морфологические черты сходства.

Утрикулы верхнего юрского — нижнего мелового рода *Flabellochara ambasi* (?) (тип рода *Clavator harrisi* Peck) имеют двустороннюю симметрию и в нижней части состоят из выпуклых валиков в виде двух вееров, расходящихся от основания (рис. 13). Орган-род *Atopochara*, имея трехстороннюю симметрию, несет три завернутых пучка валиков и борозд (рис. 14). Род *Perimneste* имеет утрикул, как бы сплюснутый по вертикали, с приподнято «смятыми» валиками и бороздами, наблюдающимися по всей поверхности (рис. 15).

В девоне до сих пор нам известны два орган-рода, напоминающие утрикулы мезо-кайнозойских харофитов. Это *Sycidium* и *Chovanella*. Широко известные сицидии на поверхности известковой оболочки имеют ряды многоугольных, правильно расположенных ямок. Вертикальное расположение этих ямок имеет сходство с вертикальным расположением бугорков у *Nodosoclavator* (*Clavator nodosus* Peck) и с ямками *Anomalochara* и др. Описанный в последние годы орган-род *Chovanella* (²¹) имеет яйцевидные известковые обложки с общим для всех признаком — расходящимися от основания лепестковидными элементами, в виде углублений и валиков, закрывающих $\frac{2}{3}$ — $\frac{3}{4}$ поверхности плода. Эта лепестковидная скульптура имеет некоторое сходство с «веерами» *Flabellochara* и со скульптурной ornamentацией нижней части *Nodosoclavator*, *Anomalochara*, *Atopochara* и т. п. Вместе с тем присутствие у хованелл двуслойной оболочки и базальной пластинки сближает эти ископаемые с гирогонитами третичных *Characaeae*. Все это подтверждает твердо установлено, если внутри известковых оболочек хованелл и сицидий будет найден обычный спирально закрученный гирогонит. До сих пор таких бесспорных находок не было. В изображениях, приведенных Пэком (¹⁸) при описании американских сицидий, мы находим в сечении одного

из них (каменноугольный *Sycidium faveatum* Peck) явственно выделяющийся второй внутренний толстый известковый слой с резкой пограничной линией. Эта вторая оболочка обнаруживается также на фотографии шлифа девонского сидидия, описанного Ван Шун и Чанг Шан-иен ((²⁰), табл. I, фиг. 2) но уже в виде тонкого внутреннего известкового слоя.

На фотографиях шлифов хованелл, приведенных Е. А. Рейтлингер и М. В. Ярцевой (²¹), также можно увидеть двойную известковую оболочку (рис. 12). Внутренний слой вместе с базальной пластинкой слогаается темным карбонатным материалом. Внешний слой оболочки хованелл состоит из слога карбоната ((²¹), рис. 12, 14, 16). Может быть, эти внутренние слога отвечают первичной известковой оболочке — гиругониту.

Ввиду того что шлифы из сидидий и хованелл делались редко, эти ископаемые остатки еще недостаточно изучены. Вместе с тем мы видели, что в меловых плодоношениях гиругониты внутри утрикулов были слабо обывествлены. Они могли и совсем не обывествляться, и утрикул мог быт единственной известковой оболочкой.

Таким образом, в настоящее время мы не можем с уверенностью ответить на вопрос, поставленный в заглавии статьи, но мы можем сделать предположение, что сидидии и хованеллы являются внешними известковыми оболочками или утрикулами харофитов, и пользоваться этим предположением как рабочей гипотезой. Являются ли известные нам древние гиругониты орган-родов *Trochiliscus* и *Eochara* связанными с орган-родами *Sycidium* и *Chovanella* как с утрикулами, мы сказать не можем. Но при своих дальнейших исследованиях древних харсфитов мы должны это иметь в виду, чтобы или подтвердить, или опровергнуть высказанную гипотезу. Разрешение этого вопроса важно для установления филогенетических связей ископаемых харсфитов.

Палеонтологический институт
Академии наук СССР

Поступило
6 V 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Grambast, N. Grambast, C. R. Soc. geol. France, № 13—14, 289 (1953).
² Idem, Rev. gen. bot., 61, 665 (1954). ³ Idem, C. R., 240, 999 (1955). ⁴ L. Grambast, C. R., 242, 2585 (1956). ⁵ Idem, C. R. Soc. geol. France, № 8, 113 (1956).
⁶ Ibid., № 14, 278 (1956). ⁷ Idem, Rev. gen. bot., 63, 1—6 (1956). ⁸ Ibid., 64, № 76, 339 (1957). ⁹ Idem, C. R., 249, 557 (1959). ¹⁰ H. Horn-af-Rantzien, Svensk bot. Tidskr., 45 (4), 638 (1951). ¹¹ Idem, Opera Bot., 1 (2), 1 (1954). ¹² Idem, Bot. Notiser., 107 (1), 1 (1954). ¹³ Idem, Micropaleontology, 2 (3), 243 (1956). ¹⁴ Idem, Stockh. contr. geol., 14 (2), 1 (1959). ¹⁵ K. Mäddler, Geol. Jarb., 67, 1 (1952).
¹⁶ Ibid., 70, 265 (1955). ¹⁷ Idem, J. paleontol. Soc. India, 2, 42 (1957). ¹⁸ R. E. Peck, J. paleontol., 8, 83 (1934). ¹⁹ Idem, Geol. Surv. prof. pap., 3, № 294—A, 61 (1957).
²⁰ Wang Shui, Chang Shan-jen, Acta paleontol. sinica, 4, № 3, 381 (1956).
²¹ Е. А. Рейтлингер, М. В. Ярцева, ДАН, 123, № 6, 1113 (1958).

Н. Б. ХРИСТОЛЮБОВА

**КОНТРОЛИРУЕМОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОЙ
АКТИВНОСТИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ УЧАСТКОВ
ГИГАНТСКИХ ХРОМОСОМ СЛЮННЫХ ЖЕЛЕЗ
ДРОЗОФИЛЫ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЕРСЕНОМ**

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 27 XII 1960)

При изучении структурных и цитохимических свойств хромосом на разных стадиях развития организма нами было отмечено явление, свидетельствующее об изменении метаболизма отдельных участков хромосом. При воздействии на некоторые стадии личинок *Drosophila melanogaster* версеном — веществом, специфически нарушающим структуру хромосом, — образовывались дополнительные ядрышки в тех участках хромосом, где в норме они никогда не наблюдаются.

Методика эксперимента заключалась в следующем: мухи откладывали яйца на корм, содержащий версен в количестве 372 мг на каждые 100 г корма. Таким образом, личинки, начиная от яйца, развивались под действием версена. Примерно половина личинок погибала на 2—3 день после вылупления, однако часть личинок проходила весь цикл развития, хотя они были значительно мельче нормальных. Слюнные железы таких личинок по сравнению со слюнными железами нормальных были развиты хуже. Изучение хромосом проводилось на давленных препаратах, окрашенных уксуснокислым кармином или метиловым зеленым с пиронином, и на срезах, которые также окрашивались метиловым зеленым с пиронином. Были взяты поздние возрасты личинок и стадия предкуколок.

При изучении хромосом личинок, развивавшихся на версеновом корме, было обнаружено, что гомологи значительно чаще, чем в норме, не конъюгируют друг с другом. Часто от хромоцентра отходят отдельно оба гомолога, а конъюгация имеет место лишь в самом конце хромосомы. В норме в ядрах слюнных желез *Drosophila melanogaster* наблюдается одно крупное ядрышко, прикрепленное к хромоцентру. В ядрах слюнных желез личинок, выросших на корме, содержащем версен, основное ядрышко такой же величины, как и в норме, но довольно часто оно бывает двойным или лопастным. Однако кроме основного ядрышка на хромосомах слюнных желез таких личинок возникают дополнительные ядрышки, которые при окраске метиловым зеленым с пиронином красятся в ярко-розовый цвет. Такие дополнительные ядрышки имеют круглую форму и выглядят оптически более плотными, чем основное ядрышко, а уксуснокислым кармином красятся темнее его. На большинстве препаратов хорошо видно место прикрепления дополнительного ядрышка к определенному участку хромосомы (рис. 1 а — в); иногда ядрышко имеет не одну, а несколько точек прикрепления (рис. 1 г). На одной хромосоме большей частью бывает лишь одно дополнительное ядрышко. Иногда по обе стороны хромосомы прикреплено по ядрышку, что говорит об участии в образовании дополнительных ядрышек обоих гомологов. Чаще всего дополнительные ядрышки возникают в следующих участках хромосом: X-хромосома 3 АВ; 8С; 11А; правое плечо 2-й хромосомы 46—47, 50СД; 51ЕФ; 58А; левое плечо 3-й хромосомы 67СФ; 71ВС; 70—72. В других участках хромосом дополнительные ядрышки встречаются реже. Участки хромосом,

к которым прикрепляются дополнительные ядрышки, Прокофьева-Бельговская⁽¹⁾ и Хэннах⁽²⁾ определяют как гетерохроматиновые районы. Так как дополнительные ядрышки возникают в одних и тех же местах хромосом во многих ядрах одной железы, то это свидетельствует об изменениях, происшедших в структуре хромосомы в самом начале развития организма.

Образование дополнительных ядрышек в хромосомах слюнных желез *Dr. melanogaster* наблюдал Кауфман⁽³⁾. Это явление было вызвано транслокацией ядрышкообразующего участка X-хромосомы в другие районы той же X-хромосомы или левого плеча 3-й хромосомы. Ядрышкоподобные фельген-отрицательные структуры, расположенные в междисковых районах хромосом, наблюдались при изучении слюнных желез хирономуса⁽⁴⁾. Описаны также ядрышкоподобные вздутия на гигантских хромосомах *Sciaga ocellaris*⁽⁵⁾.

В нашем эксперименте образование дополнительных ядрышек в хромосомах слюнных желез было вызвано действием версена на личинки с начала их развития. Хромосомы образованы тончайшими элементарными фибриллами, состоящими, по предположению Мэзия⁽⁶⁾, из палочек нуклеопротеида длиной в 4000 Å, связанных между собою мостиками катионов (Ca и Mg). Версен связывает бивалентные катионы и удаляет их из структуры хромосом или же, как предполагают теперь⁽⁷⁾, вызывает сдвиг ионного баланса в клеточной среде. Такой сдвиг, по-видимому, влечет за собой изменения, в первую очередь, структуры некоторых гетерохроматиновых районов хромосомы, и они приобретают способность образовывать ядрышки. Шнейдер⁽⁸⁾ показал, что в результате действия версена и некоторых других веществ на ядра из них выделяются значительные количества РНК. Автор объясняет это явление тем, что частицы рибонуклеопротеида связаны с магнисом хромосом, и когда последний связывается версеном, эти частицы выходят в цитоплазму.

Факт возникновения дополнительных ядрышек свидетельствует об избирательной физиологической активности определенных гетерохроматиновых участков хромосом. Детальное исследование процессов, связанных с этими явлениями, а также изучение наследуемости полученных изменений метаболической активности хромосом продолжаются.

Институт цитологии и генетики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
23 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Прокофьева-Бельговская, Изв. АН СССР, сер. биол., **3**, 362 (1939). ² А. Хэннах, *Advances Genetics*, **4**, 87 (1951). ³ В. Р. Кауфманн, *Zs. Zellforsch.*, **2**, 1 (1938). ⁴ R. L. King, H. W. Beams, *J. Morphology*, **56**, 3, 577 (1934). ⁵ C. W. Metz, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **23**, 137 (1937). ⁶ D. Mazia *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40**, 521 (1954). ⁷ В. Р. Кауфманн, M. R. McDonald, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43**, 3, 262 (1957). ⁸ J. H. Schneider, *J. Biol. Chem.*, **234**, 10, 2728 (1959).

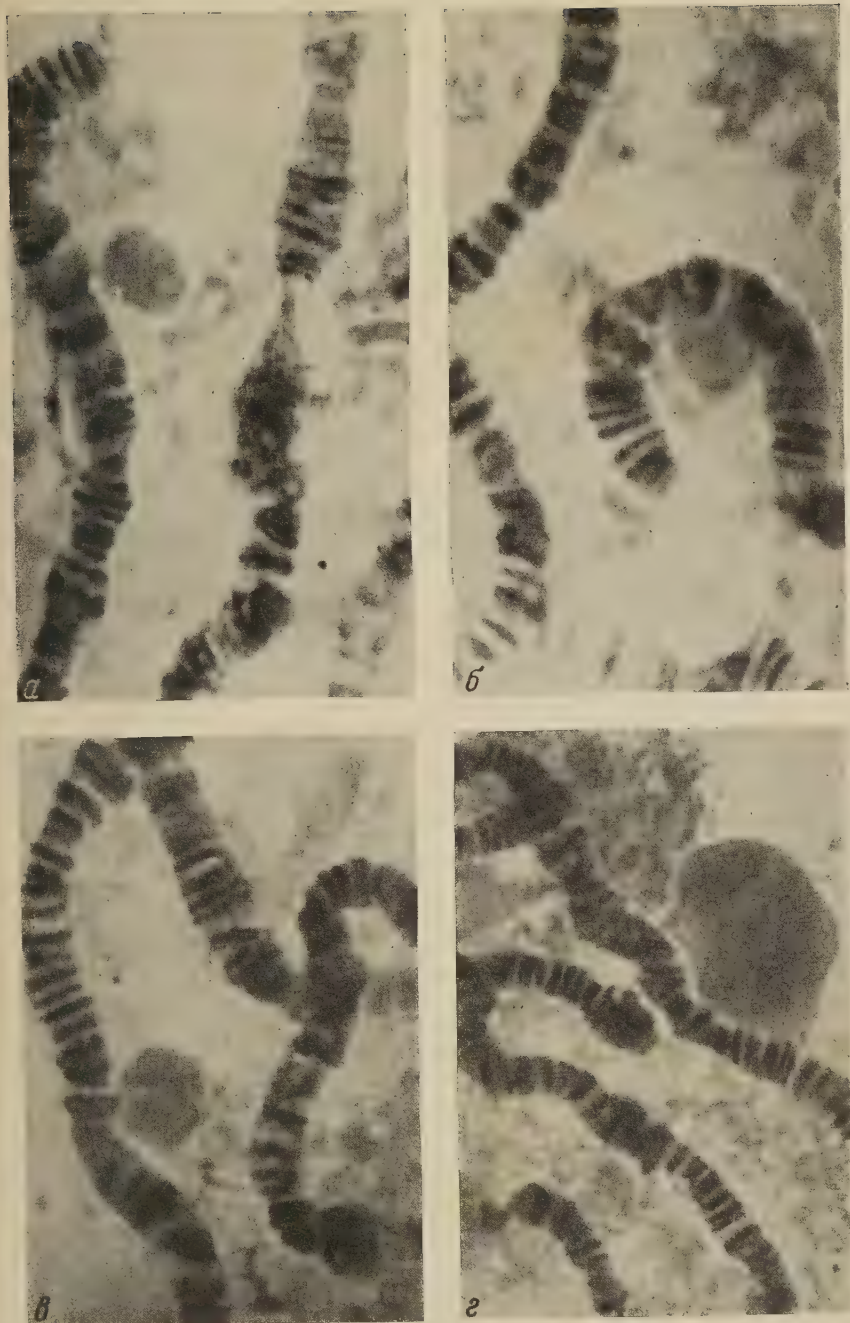


Рис. 1. Дополнительные ядрышки: *а, б* — прикрепленное к X-хромосоме (район 3 АВ), ок. 15, об. 90 \times ; *в* — прикрепленное к правому плечу 2-й хромосомы (район 58 А), ок. 15, об. 90 \times ; *г* — имеющее несколько точек прикрепления; левое плечо 3-й хромосомы (районы 71—72), ок. 15, об. 40 \times

Г. В. ОВСЯННИКОВ

**МОРФОФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЕЙ
КОЖИ ПОЛОВОГО АППАРАТА БАРАНА В СВЯЗИ
С ВОЗРАСТОМ И КАСТРАЦИЕЙ**

(Представлено академиком Н. Н. Аничковым 10 I 1961)

В ряде работ, посвященных изучению кожи, отмечаются видовые (^{3, 12}) и локальные (^{1, 2, 4, 13, 14}) особенности ее строения, обусловленные функциональными отправлениями. Весьма демонстративно такие отличия проявляются в строении кожного покрова мошонки, но в существующей литературе сведения о строении и функции ее крайне ограничены. Это особенно относится к гистологии мошонки (^{5, 11, 19, 20}), о развитии которой, гистогенезе (¹⁶) и возрастных особенностях ее тканей и их реактивных изменениях известно очень мало.

В этом сообщении описываются возрастные особенности кожи мошонки барана и изменение ее строения, связанное с прекращением функции половых желез. Материал от 40 животных фиксировался в 10% формалине, жидкостях Ценкера и Максимова. Целлоидиновые среды окрашивались гематоксилином Бёмера, Караччи или Вейгерта с подкраской эозином или пикроиндигокармином, а также железным гематоксилином по Гейденгайну, частично в комбинации со смесью Маллори. Для окраски эластических волокон применялся орсеин или резорцин-фуксин.

После рождения организм попадает в совершенно новые условия существования, и в связи с этим, в зависимости от выполняемой функции, происходит преобразование структур. У плода перед рождением толщина эпидермиса мошонки достигает 11—19 μ , дермы 0,8—0,9 мм, мускульно-эластической оболочки — 95—114 μ . Спустя месяц после рождения кожа несколько утолщается в сравнении с последними днями утробного периода. Эпидермис достигает 20—30 μ . Он образован 3—5 слоями клеток. Появляется прерывистый зернистый слой, образованный одним рядом клеток, появление которого в этот период в других участках кожи мелких жвачных отрицается (⁶⁻⁸). Над этим слоем располагаются тонкие роговые пластинки.

С развитием семенников увеличивается поверхность кожи мошонки, происходит рассредоточение корней волос (рис. 1). После рождения новообразованного волос обнаружено не было. С достижением половой зрелости строение эпидермиса усложняется за счет увеличения количества слоев в ростковом слое до 5—8 и утолщения зернистого и рогового слоя, как структур, принимающих на себя часть защитной функции, не вполне обеспеченной разреженным волосным покровом. Толщина эпидермиса на препарате зависит от состояния мускульно-эластической оболочки. При ее расслаблении толщина эпидермиса равна 32—66 μ , при сокращении мускульно-эластической оболочки толщина его может достигать 250—260 μ .

Пигментация, проявляющаяся сильнее, чем в других отделах кожи (¹⁵), обусловлена меланоцитами и скоплением меланина в базальных клетках эпидермиса. Волосные влагалища и сальные железы увеличиваются в размере, мало отличаясь от аналогичных структур других участков кожи. Корни волос, спустя месяц после рождения, достигают толщины 80—87 μ . С достижением половой зрелости диаметр их увеличивается до 120—160 μ .

Размер сальных желез изменяется позднее, чем размер корней волос. К периоду половой зрелости их железистые мешочки достигают 100 μ в длину, но продолжают расти дальше и к двум годам увеличиваются до 300 μ . Напротив, развитие потовых желез непосредственно связано с половыми железами. Спустя месяц после рождения в семенниках сперматогенез еще не наступает, и потовые железы мошонки мало отличаются от потовых желез других областей кожи. По форме они представляют собой слабо извитые трубочки. Просвет секреторного отдела сравнительно небольшой — такой же, как и плода в предродовом периоде. В противоположность данным других авторов (¹⁷, ²⁰), по нашим наблюдениям с наступлением половой зрелости потовые железы мошонки достигают колоссального развития, а их секреторные отделы образуют сплошной железистый слой в сетчатом слое кориума (рис. 1). По типу секреции потовые железы являются апокриновыми (рис. 2). Просвет их секреторного отдела в половозрелом возрасте достигает 160—300 μ . Выводные протоки открываются в верхней трети волосяного влагалища, несколько выше впадения сальных желез. Такое развитие потовых желез способствует важной терморегуляционной функции мошонки, обеспечивающей нормальный сперматогенез. Предположение о терморегуляционной функции потовых желез подкрепляется тем фактом, что здесь, в области мошонки, по литературным данным (¹⁷, ²⁰) не обнаруживается значительного развития кровеносных и лимфатических сосудов.

Соединительнотканная часть кожи, спустя месяц после рождения, несколько утолщается, главным образом за счет промежуточного слоя. В дальнейшем, в связи со значительным увеличением объема семенников, в половозрелом возрасте происходит быстрое развитие дермы, достигающей толщины 3,6 мм (рис. 1), превышающей толщину кожи других участков (⁷, ¹⁰). В этот период в сосочковом и сетчатом слоях увеличивается толщина пучков коллагеновых волокон и уменьшается количество клеток. Дерма в связи с этим приобретает характер плотной оформленной грубоволокнистой соединительной ткани. Вопреки литературным данным (¹⁷, ²⁰), особенного развития достигают пучки коллагеновых волокон сетчатого слоя, располагающиеся параллельно поверхности кожи. Их толщина составляет 13—15 μ , а отдельные пучки достигают 21 μ . Эластические волокна также утолщаются, но в меньшей степени.

В месячном возрасте мускульно-эластическая оболочка, расположенная в сетчатом слое на границе с подкожной клетчаткой, мало отличается от таковой плода перед рождением. С достижением половой зрелости она становится значительно толще, достигая 1 мм (рис. 1). В зависимости от сокращения мускульно-эластической оболочки может значительно изменяться площадь поверхности кожи. Вероятно, это также имеет значение в поддержании определенной температуры, нужной для нормальной деятельности семенников. Пучки гладких мышц мускульно-эластической оболочки проходят в разных направлениях, но преимущественно в продольном и поперечном. Между пучками гладких мышц развиваются эластические волокна, концы которых оплетают отдельные мышечные клетки. Такое тесное соединение гладких мышц и эластических волокон создает мощный мускульно-эластический аппарат. В разрез с литературными указаниями (²⁰), пучки гладких мышц никогда не распространяются за пределы сетчатого слоя (рис. 1).

Сведения о строении кожи мошонки после кастрации в литературе отсутствуют. В эксперименте удалось выяснить, что удаление семенников вызывает значительную перестройку структур кожи мошонки (рис. 4). Вначале после кастрации, в связи с сокращением мускульно-эластической оболочки, кожа утолщается. Спустя 1—2 года происходит перестройка эпидермиса. Вначале он достигает исходной толщины, а затем становится тоньше, причем постепенно исчезает зернистый слой. Строение эпидермиса теперь становится сходным с эпидермисом кожи брюшной стенки. Корни волос приобретают более вертикальное направление, вследствие смещения



Рис. 1. Кожа мошонки барана 9 мес. Формалин, гематоксилин и пикроиндигокармин. Об. апохр. 16 мм, комп. ок. 8X. а — эпидермис, б — корни волос, в — сальные железы, г — железистый слой, д — дерма, е — мускульно-эластическая оболочка

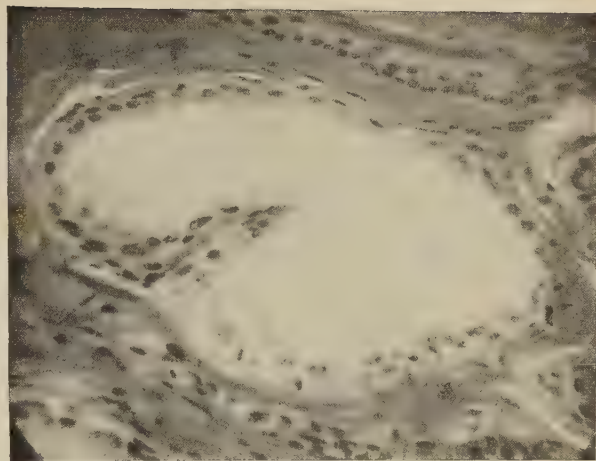


Рис. 2. Секреторный отдел потовой железы кожи мошонки барана 9 мес. Апокриновая секреция. Жидкость Максимова, железный гематоксилин. Об 40, ок. 10 X

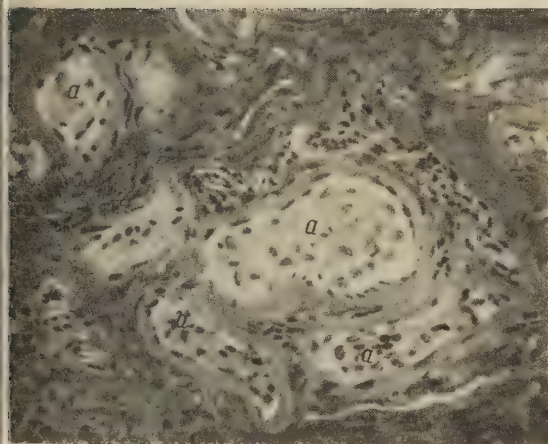


Рис. 3. Секреторный отдел потовой железы мошонки барана спустя 4 года после удаления семенников. Жидкость Максимова, железный гематоксилин. Об. 40, ок. 10 X. а — десквамация секреторного эпителия

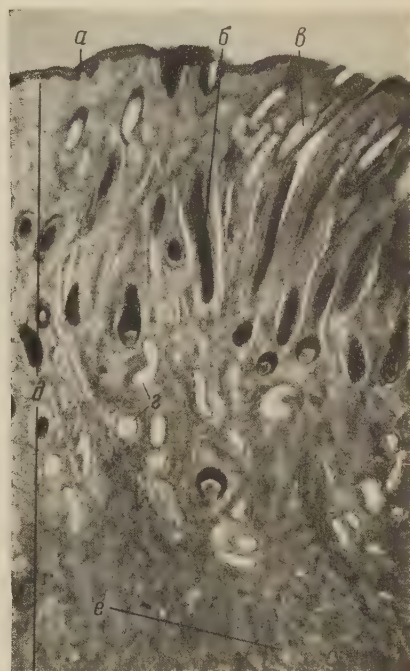


Рис. 4. Кожа мошонки после кастрации, валух 9 мес. Формалин, гематоксилин и пикроиндигокармин. Об. апохр. 16 мм, комп. ок. 8X. а — эпидермис, б — корни волос, в — сальные железы, г — потовые железы, д — дерма, е — отдельные пучки мускульно-эластической оболочки

слоев кожи, и располагаются чаще (рис. 4). Сальные железы имеют такое же строение и размеры, как и в других частях брюшной стенки. Напротив, потовые железы подвергаются значительным изменениям (рис. 3), что подтверждает их тесную связь с функциональной деятельностью половых желез. Это изменение потовых желез захватывает длительный период до 3—4 лет. В секреторных отделах происходит отторжение секреторных клеток (рис. 3), в результате чего концевой отдел оказывается выстлан одним миоэпителиальными клетками, так как секреторный эпителий не восстанавливается. В дальнейшем секреторные отделы уменьшаются и могут полностью исчезнуть. В дерме происходят изменения, связанные с перестройкой волокнистых структур. Пучки коллагеновых волокон, разволакиваясь, становятся тоньше, теряют направленность и становятся извилистыми. Строение кориума в целом напоминает кожу брюшной стенки. Гладкие мышцы мускульно-эластической оболочки распадаются на мелкие пучки и постепенно исчезают. Между гладкими мышцами разрастаются прослойки соединительной ткани. В клетках подкожной клетчатки начинает откладываться жир.

Изложенное показывает, что после удаления половых желез кожа животного утрачивает специфические особенности, приобретая строение обычной брюшной кожи.

Ленинградский
ветеринарный институт

Поступило
5 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. И. Безлер, Тр. I гистол. конфер., М., 1934, 1935, стр. 168. ² А. А. Браун, ДАН, 46, № 2, 80 (1945). ³ А. А. Браун, Тр. I гистол. конфер., М., 1934, 1935, стр. 175. ⁴ А. А. Браун, М. Ф. Иванов, Арх. анат. гистол., эмбриол., 10, № 2, 261 (1931). ⁵ А. А. Заварзин, Курс гистологии и микроскопической анатомии, Изд. 5, Л., 1939. ⁶ В. И. Сарра-Ефимова, Тр. Омск. вет. инст., 11, 3 (1938). ⁷ Н. В. Попова, ДАН, 44, № 2, 80 (1944). ⁸ Н. В. Попова, Тр. инст. морфол. животн. им. А. Н. Северцова АН СССР, 4, 51 (1951). ⁹ В. А. Шолохов, ДАН, 45, № 9, 413 (1944). ¹⁰ В. А. Шолохов, ДАН, 49, № 1, 59 (1945). ¹¹ А. В. Немилев, Гистология и эмбриология домашних животных, Изд. 2, М.—Л., 1936. ¹² E. Krenzle, Arch. mikr. Anat., 79, № 1, 525 (1912). ¹³ J. C. Dick, J. Anat., 81, № 3, 201 (1947). ¹⁴ P. B. Medawar, Quart. J. micr. sci., 94, № 4, 481 (1953). ¹⁵ G. Szabo, Brit. med. J., № 4869, 1016 (1954). ¹⁶ G. Kraucher, Zs. mikr.-anat. Forsch., 26, 1, 281 (1931). ¹⁷ P. H. Esser, Zs. mikr.-anat. Forsch., 31, № 1, 108 (1932). ¹⁸ H. Hoepke, Die Haut, in Möllendorff's Handb. mikr. Anat., 3, 1 (1927). ¹⁹ F. Pinkus, Die normale Anatomie der Haut, in Jodassohn's Handb. Haut- und Geschlechtskrankh., 1, 1 (1927). ²⁰ H. Stieve, Männliche Genitalorgane, in Möllendorff's Handb. mikr. Anat., 7, 2 (1930).

О. Г. МИРОНОВ

К ВОПРОСУ О РАДИОАКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВЫСШИХ ВОДОРΟΣЛЕЙ В РАЙОНЕ ФЕОДОСИИ

(Представлено академиком А. Л. Курсановым 3 XII 1960)

Вопросы радиоактивного загрязнения морей и океанов привлекают к себе все большее и большее внимание. В работах Е. М. Крепса⁽⁴⁾, В. Г. Богорова и Е. М. Крепса⁽³⁾ указывается на источники радиоактивного загрязнения морской воды и морских организмов. В. В. Агранат⁽¹⁾, Г. Д. Лебедева^(5, 6), Г. Г. Поликарпов⁽⁸⁾ сообщают, что некоторые водные организмы способны накапливать в себе радиоактивные изотопы. Все это побудило нас провести настоящее исследование.

Целью работы было дать краткую радиологическую характеристику некоторых высших водорослей, встречающихся в значительных количествах у берегов Феодосийского курорта. Образцы водорослей отбирались с глубины 1,5—2,0 м в пяти точках. Всего было изучено шесть видов высших водорослей: *Ulva lactuca* f. *rigida* (Ag.) Le Jolis, *Enteromorpha intestinalis* f. *cornucopiae* (Lyngb.) Ag., *Scytosiphon lomentaria* (Lyngb.) Ag., *Cystoseira barbata* (Good. et Wood.) Ag., *Porphyra leucosticta* Thyr?, *Bryopsis plumosa* (Huds.) Ag.,— а также высшее цветковое растение *Zostera nana* (Roth.) ?

Пробы водорослей доставлялись в лабораторию, где озолялись в муфельной печи при температуре 700°. Зола собиралась в пробирки, откуда брались навески (около 0,1) для радиометрических исследований.

Определение радиоактивности проводилось в лаборатории радиобиологии Севастопольской биологической станции АН СССР при непосредственной помощи Г. Г. Поликарпова, за что автор выражает ему глубокую благодарность.

Радиоактивность определялась на установке типа Б-2 в свинцовом домике с торцовым счетчиком типа МСТ-17. Определение велось методом относительного счета. Полученные данные подвергались статистической обработке по методу Н. В. Лучника⁽⁷⁾. Для перехода от относительной активности к абсолютной применялся калиевый эталон той же плотности, что и препарат зола. Параллельно в золе водорослей проводилось количественное определение калия кобальт-нитритным способом.

Таблица 1

	Активность навески зола, μCi		$a - b, \mu\text{Ci}$	Активность зола, $\mu\text{Ci/g}$
	за счет K^{40} , (a)	истинная (б)		
<i>Zostera nana</i>	$17,6 \cdot 10^{-6}$	$17,4 \cdot 10^{-6}$	$0,2 \cdot 10^{-6}$	$18,2 \cdot 10^{-5}$
<i>Enteromorpha intestinalis</i> f. <i>cornucopiae</i>	$8,5 \cdot 10^{-6}$	$12,0 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$12,0 \cdot 10^{-5}$
<i>Ulva lactuca</i> f. <i>rigida</i>	$8,9 \cdot 10^{-6}$	$10,0 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$12,4 \cdot 10^{-5}$
<i>Cystoseira barbata</i>	$48,4 \cdot 10^{-6}$	$110,0 \cdot 10^{-6}$	$61,6 \cdot 10^{-6}$	$11,5 \cdot 10^{-4}$

Как видно из табл. 1, активность *Zostera nana*, *Enteromorpha intestinalis* f. *cornucopiae*, *Ulva lactuca* f. *rigida* обусловлена наличием в них K^{40} . Отдельно стоит *Cystoseira barbata*, активность которой значительно превышает ее естественную активность. В литературе (2) имеется указание на то, что общая радиоактивность данной водоросли, собранной в районе г. Севастополя, значительно превышает ее радиоактивность, обусловленную K^{40} , и обусловлена помимо калия осколочными продуктами. Поскольку в нашем случае также нельзя было объяснить радиоактивность *Cystoseira barbata* только наличием в ней K^{40} , мы изучили поглощение излучения золы этой водоросли в алюминии. Полученные результаты (в процентах) приведены в табл. 2.

Как видно из табл. 2, ход поглощения излучения золы *Cystoseira barbata* не совпадает с ходом поглощения K^{40} и в то же время близок к таковому излучения Sr^{90} — Y^{90} . Таким образом, есть все основания предположить, что радиоактивность *Cystoseira barbata* обусловлена помимо K^{40} еще и осколочными продуктами ядерного деления.

Поскольку интенсивные ядерные испытания начались в 1954 г., интересно было определить радиоактивность *Cystoseira barbata*, собранной до 1954 г. В Феодосийском краеведческом музее нам были любезно предоставлены образцы этой водоросли, собранной летом 1953 г. Проведенное изучение поглощения активности золы этой водоросли в алюминии показало, что оно целиком совпадает с поглощением в алюминии K^{40} .

Изучение образцов *Cystoseira barbata* в лаборатории радиобиологии Севастопольской биологической станции АН СССР сбора 1939 и 1949 гг. также показало отсутствие осколочных продуктов в препаратах золы из этих водорослей.

Помимо приведенных в табл. 1 водорослей, нами были изучены еще *Porphyra leucosticta*, *Scytosiphon lomentaria*, *Bryopsis plumosa*, радиоактивность золы которых составляла, соответственно, $8,4 \cdot 10^{-5}$; $9,3 \cdot 10^{-5}$ и $4,5 \cdot 10^{-5}$ μ Сi/г и отвечала содержанию в них K^{40} .

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы: 1) радиоактивность *Zostera nana*, *Ulva lactuca* f. *rigida*, *Enteromorpha intestinalis* f. *cornucopiae*, *Porphyra leucosticta*, *Bryopsis plumosa*, *Scytosiphon lomentaria* обусловлена наличием в них K^{40} ; 2) радиоактивность *Cystoseira barbata* обязана присутствием не только K^{40} , но и осколочными продуктами ядерного деления.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность сотруднику Ботанического института АН СССР А. И. Прошкиной-Лавренко за оказанную помощь при определении собранных нами образцов водорослей.

Поступило
29 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Агранат, Гигиена и санитария, № 10, 73 (1958). ² А. Д. Акамсин, В. П. Парчевский, Г. Г. Поликарпов, Природа, № 2, 95 (1960). ³ В. Г. Богоров, Е. М. Крепс, Природа, № 9, 45 (1958). ⁴ Е. М. Крепс, Изв. АН СССР, сер. биол., № 3, 321 (1959). ⁵ Г. Д. Лебедева, Мед. радиол., 2, № 6, 65 (1957). ⁶ Г. Д. Лебедева, Мед. радиол., 4, № 4, 73 (1959). ⁷ Н. В. Лунин, Фармакол. и токсикол., № 4, 375 (1959). ⁸ Г. Г. Поликарпов, Природа, № 1, 104 (1960).

А. А. ПРОКОФЬЕВА-БЕЛЬГОВСКАЯ

ФУНКЦИИ ТЕЛОМЕРНЫХ УЧАСТКОВ ХРОМОСОМ В ЭМБРИОНАЛЬНЫХ МИТОЗАХ

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 17 XII 1960)

При исследовании действия рентгеновских лучей на дробящуюся икру вьюна (¹, ²) и лосося (⁴) было обнаружено, что поврежденные хромосомы образующие мосты и фрагменты, наблюдаются в ряду клеточных поколений, включая стадию гастрюлы.

Для выяснения природы этих хромосомных aberrаций, длительно сохраняющихся в раннем эмбриогенезе, было проведено цитологическое исследование поведения aberrантных хромосом в дробящейся икре лосося после облучения зародыша на стадии 8 бластомер рентгеновскими лучами дозой 800 г и на стадии морулы — 1000 и 10000 г.

Облучение производилось на установке Ленинградского института медицинской радиологии при напряжении 200 кв, силе тока 20 ма, без фильтра, на расстоянии 24 см, при мощности дозы 500 г/мин.

Исследование хромосомных перестроек производилось на тотальных препаратах раздавленных зародышей, фиксированных уксусным спиртом (3 : 1) и окрашенных уксуснокислым кармином.

Было обнаружено (³), что длительный цикл хромосомных и хроматидных мостов в бластомерах связан с механизмом «разрыв — соединение — мост» установленный Мак Клинтон (⁴, ⁵) и далее уточненным рядом исследователей (⁶, ⁷).

При исследовании дицентрических хромосом и хроматид, образующих мосты в последовательных митозах, в их структуре и поведении были обнаружены некоторые существенные особенности.

В клетках бластулы отчетливо видно, что многие ядра, вступающие в профазу, имеют хорошо красящиеся хроматические «хвосты», утончающиеся на свободном конце и образованные иногда пучком из 4 — 6 хромосом (рис. 1 а). Очевидно, это полумост — результат разрыва моста, образовавшегося в предыдущей анафазе, — не втянувшийся в интерфатическое ядро и вступающий в следующий митоз, сохраняя поляризацию предыдущего митоза. Он неподвижно локализован в том самом участке цитоплазмы, где разорвался мост в предыдущей телофазе. При переходе ядра в стадию метафазы обнаруживаются поразительные особенности поврежденных хромосом, образующих полумост.

Плоскость последовательных делений дробления яйца, как известно, поворачивается на 90°, чем обеспечивается ориентация веретена и деления в максимальном по размерам пространстве цитоплазмы. Плоскость метафазы, в которую перемещаются все хромосомы, оказывается, таким образом, перпендикулярной к плоскости предыдущего деления. Однако хромосомные компоненты полумоста при всех перемещениях остальных хромосом остаются неподвижными, образуя боковой жгут в плоскости метафазы (рис. 1 б). Подобное положение хромосом полумоста свидетельствует о том, что, несмотря на потерю способности к перемещению разорванных концов хромосом, центромерные участки хромосом полумоста функционируют нормально.



Рис. 1. Радиационные поражения хромосом в раннем развитии лосося. *a* — *д* — 800 г, *e* — *л* — 1000 г. *a* — пучок хромосом полумоста вне ядра на стадии профазы, 1800 \times ; *б*, *в* — хромосомы полумоста в метафазе (*б*), в анафазе (*в*); *г* — нормальные хромосомы полумоста в метафазе (гаструла), 1800 \times ; *д* — недеспирализующиеся концы хромосом в профазе (гаструла), 1800 \times ; *е* — *и* — недеспирализующиеся (лишенные теломеры) хромосомы в интерфазе (*е*), метафазе (*ж*), анафазе (*з*), телофазе (*и*), 1800 \times ; *к* — недеспирализующийся мост в интерфазе, 1800 \times ; *л* — пикнотический клубок недеспирализующихся хромосом в интерфазном ядре

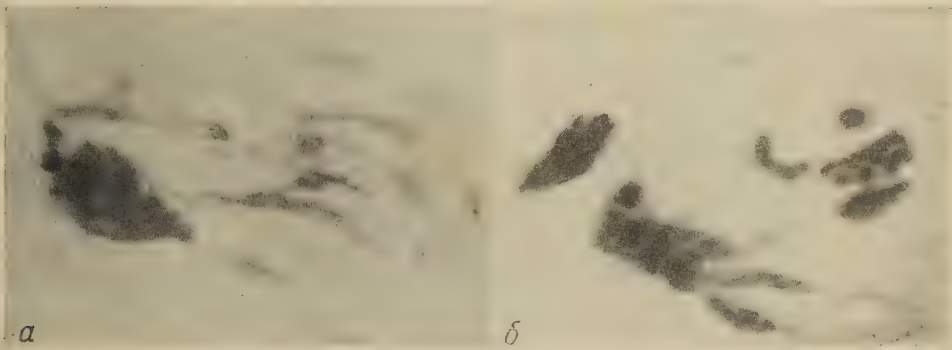


Рис. 2. Радиационное поражение хромосом лосося в поздней бластуле (10 000 г). *a* — пикнотические и нитевидные хромосомы в интерфазном ядре, 4000 \times ; *б* — структура резко поврежденного хромосомного комплекса после ряда циклов «разрыв — соединение — мост»

и, локализуясь вместе с центромерами остальных хромосом в экваториальной плоскости веретена.

В анафазе при расхождении сестринских групп хромосом к полюсам полумост также расщепляется. Его хроматиды, будучи соединенными ранее разорванными концами, своими центромерными участками расходятся к противоположным полюсам. Образующийся при этом своеобразный боковой мост разрывается, формируя фигуру «крылатой» анафазы и телофазы (рис. 1 в).

В результате подобного деления возникают «хвостовые» ядра следующих поколений. Соединение между собой полухроматид или хроматид, образующих вторичный полумост, приводит к повторению этого цикла в течение нескольких митозов.

Однако значительная часть этих ранних мостов в бластомерах лосося недолговечна. Их потеря из ядра вызывается следующими причинами:

1. Центромерный участок хромосом, образующих полумост, отходящий в телофазе к полюсу веретена, не в состоянии тянуть за собой неподвижное тело разорванной хромосомы. Прилегающий к центромере район хромосомы растягивается в тонкую нить, по которой полумост рано или поздно отрывается от центромеры и в виде крупного фрагмента остается в цитоплазме, еще всего у границы клетки.

2. Вторая причина утери полумоста связана с потерей у систематически образующихся хромосом в эмбриональных митозах способности к деспирализации и включению в интеркинетическое ядро. В виде пикнотического тяжа полумост в клетках бластулы и гастролы торчит из интеркинетического ядра и обрывается, образуя в цитоплазме пикнотический фрагмент (рис. 1 к).

Цитологический анализ поведения хромосом полумоста, т. е. хромосом, лишенных теломерного участка, позволяет выяснить некоторые существенные, остающиеся до сих пор неясными функции теломеры — участка, образующего свободный конец хромосомы.

До настоящего времени с несомненностью установлено лишь одно свойство свободного конца неповрежденной хромосомы, названного Меллером термином «теломера»⁽⁸⁾. Он не присоединяет к себе оторванных частей хромосом. В отличие от остальных, биполярных участков хромосомы он является монополярным. Лима де Фариа показал, что подобно центромере теломерный участок хромосомы образован несколькими хромомерами, каждая из которых, по-видимому, в случае утери более дистальной хромомеры, обладает способностью выполнять функцию теломеры — т. е. закрывать свободный конец хромосомы⁽⁹⁾.

Материалы настоящего исследования выясняют другие особенности теломерного района.

На основании анализа поведения хромосом, лишенных теломерного участка в цикле «разрыв — соединение — мост», можно сделать заключение, что теломера играет важную роль в динамике хромосомы в эмбриональных митозах.

Согласно современным представлениям, ориентация хромосом в метафазической плоскости обусловлена функционированием только центромеры: толкаясь с равной силой от обоих полюсов, центромерные участки располагаются в экваториальной плоскости веретена, остальное тело хромосомы вместе с теломерой пассивно следует за центромерой.

Данные, полученные в настоящем исследовании, показывают, что не менее важную роль в этом процессе выполняет теломера. Хромосомы с теломерами свободно перемещаются в веретене на всех стадиях митоза, тогда как плечо хромосомы, потерявшее теломеру, в эмбриональных митозах совершенно неподвижно. Способностью к активным движениям обладает только центромера, но ее одной недостаточно для передвижения неподвижного тела хромосомы, лишенной теломеры. Это особенно четко выражено у пораженных радиацией длинных хромосом с терминальной или субтерминальной центромерой, характерных для лосося.

Таким образом, динамика хромосом в эмбриональных митозах связана с функционированием центромеры и теломеры. Присутствие обоих участков необходимо для сохранения хромосомы в ряду клеточных поколений.

Вторая функция теломеры, обнаруженная в этом исследовании, связана с ее ролью в спирализации хромосомы. После нескольких циклов «разрыв — соединение — мост» в поздней бластуле — ранней гастрале хромосомы полумоста в ряде ядер недеспирализуются и, как мы уже указывали, в виде хроматического жгута торчат из интерфатического ядра (рис. 1 к).

Иногда они претерпевают частичную деспирализацию и втягиваются в покоящееся ядро, образуя в нем пикнотический клубок нитей (рис. 1 л) или пикнотические концы у поврежденных хромосом (рис. 1 д).

Подобное поведение разорванных хромосом полумоста может определяться двумя причинами:

1. Хромосомы полумоста относительно других хромосом комплекса запаздывают в переходе в интерфазу, будучи чисто механически задержанными в веретене в период анафазы — телофазы.

2. Хромосомы без теломеры снижают саму способность к деспирализации.

По-видимому, обе эти причины оказывают влияние на поведение разорванной хромосомы. Значение имеет, вероятно, и степень повреждения теломерного участка, который образован не одной, а несколькими хромомерами (⁹).

Не лишено вероятности, что возникновение недеспирализующихся разбухших или пикнотических хромосом связано отчасти с обратным влиянием измененной цитоплазмы, содержащей ненормально функционирующее ядро. Однако одновременное присутствие в ядре хромосом с нормальным и дефектным циклом спирализации не может быть объяснено только дефектами общего обмена и влиянием цитоплазмы, как это установлено для ряда гибридов (¹⁰, ¹¹).

Наблюдения за поведением в ряду клеточных поколений хромосом, лишенных теломеры, говорят в пользу заключений о теломере как о важном факторе нормального цикла спирализации хромосомы.

В первых 5—7 митозах после облучений дозой 800 г цитологически обнаруживаемые радиационные повреждения хромосом проявляются в виде их перестроек. Структурные особенности тела хромосом при этом остаются неизменными: в ранней и средней бластуле они имеют нормальный вид изогнутых палочковидных тел. Но уже в поздней бластуле, в результате многократных разрывов и полной утери хромосомами в цикле мостов теломерных районов, в некоторых ядрах появляются короткие центрические фрагменты хромосом с «законсервированными» концами, не образующими мостов. Эти хромосомные фрагменты в течение всего ядерного цикла имеют вид компактных хроматических тел среди нитей нормально деспирализующихся неповрежденных хромосом (рис. 1 б, е — и). При действии высоких доз облучения (1000 и 10000 г) уже в бластуле немногие оставшиеся в некоторых ядрах хромосомы имеют вид пикнотических укороченных тел, сохраняющих способность, благодаря наличию в них центромеры, располагаться в экваториальной плоскости веретена в метафазе и делиться, отходя к полюсам, в анафазе (рис. 1 е — и). В некоторых ядрах в течение всего клеточного цикла хромосомы имеют вид пикнотических глыб с рваными концами (рис. 2 а, б).

Таким образом, в эмбриональных митозах выявлен еще один тип необратимого радиационного повреждения ядра, проявляющегося и прогрессивно усиливающегося в ряду клеточных поколений. Оно выражается в потере хромосомы способности к деспирализации в покоящемся ядре и, как мы предполагаем, связано с утерей хромосомами теломерных участков. Это повреждение может быть рассмотрено как одно из проявлений лучевого заболевания ядра. Если мы учтем, что функционирование хромосомы, выражающееся в ее специфическом участии в обмене веществ, связано с перио-

ом ее деспирализации в клеточном цикле (¹², ¹³), то грозные последствия
ия клетки утери способности к деспирализации даже незначительных
астишков хромосом станут очевидными.

Потеря способности хромосомы без теломеры в ряду клеточных поколе-
ий к деспирализации подтверждает правильность уже высказанного нами
редположения, что активной фазой в динамике хромосомы является не
ириализация, а ее деспирализация (¹⁴). В этом отношении свойства нуклео-
протеидов хромосомных нитей сходны с таковыми белка мышцы нитей мио-
ина: утомление мышцы сказывается на фазе их растяжения, а не на фазе
к сокращения (¹⁵).

Институт биологической физики
Академии наук СССР

Поступило
6 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Беляева, Г. А. Покровская, ДАН, **119**, № 2 (1958).
В. Н. Беляева, Г. А. Покровская, ДАН, **125**, № 3, 632 (1959).
А. А. Прокофьева-Бельговская, Цитология (1961) — в печати).
В. McClintock, Proc. Nat. Acad. Sci., **25**, 405 (1939). ⁵ В. McClintock,
Genetics, **23**, № 4, 315 (1941). ⁶ C. D. Darlington, A. P. Wylie, Symposium on
Chromosome breakage, Suppl. Heredity, **6**, 197 (1953). ⁷ D. Schwartz, C. Murray,
Proc. Intern. Genetics Symposia, Tokyo, 1956, p. 96. ⁸ H. J. Muller, The New Sys-
tematics, 1940, p. 185. ⁹ A. Lima-de-Faria, P. Sarvella, Hereditas,
№ 2—3, 337 (1958). ¹⁰ M. Doncaster, B. Gray, Quart. J. Microscop. Sci., **58**,
3 (1913). ¹¹ Н. Н. Соколов, Взаимодействие ядра и цитоплазмы при отдаленной
бридизации, Изд. АН СССР, 1959. ¹² C. Stern, Am. Naturalist, **72**, 350 (1938).
C. Stern, J. Cell and Comp. Physiol., **52**, Suppl. 1 (1958). ¹⁴ А. А. Прокофье-
ва-Бельговская, Сборн. памяти Д. Н. Насонова, Инст. цитологии АН СССР,
60, стр. 87. ¹⁵ В. А. Энгельгард, 5-я конфер. по высокомолекулярным соеди-
нениям, Изд. АН СССР, 1948, стр. 122.

Н. А. КИСЕЛЕВ, Л. П. ГАВРИЛОВА и А. С. СПИРИН

О КОНФИГУРАЦИЯХ МАКРОМОЛЕКУЛ ВЫСОКОПОЛИМЕРНОЙ
РИБОНУКЛЕИНОВОЙ КИСЛОТЫ ПО ДАННЫМ
ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ

(Представлено академиком А. И. Опариным 3. III 1961)

Исследования физических и физико-химических свойств высокополимерных рибонуклеиновых кислот (РНК) в растворах позволили в последнее время прийти к определенным представлениям об их макромолекулярной организации и сформулировать ряд положений об их первичной, вторичной и третичной структуре (¹). Рассмотрение макромолекулярной организации высокополимерных (вирусных и рибосомальных) РНК в растворе основывается на данных по конфигурационным переходам макромолекул РНК в зависимости от условий температуры и ионной силы (²⁻⁷). Эти данные, а также обобщение ряда более ранних работ (^{8, 9}) привели к заключению о существовании трех основных типов конфигураций высокополимерной РНК, связанных друг с другом обратимыми переходами: а) развернутая однотяжная полинуклеотидная цепь; б) компактная палочка; в) компактный клубок (¹). Развернутая однотяжная полинуклеотидная цепь РНК имеет место при повышенных температурах раствора или в полностью обезсоленном водном растворе и представляет собой более или менее распрямленную единую нить, не обладающую вторичной и третичной структурой. РНК в виде компактной палочки существует, согласно развиваемым представлениям, при комнатной температуре в условиях небольшой ионной силы раствора (до 0,01); палочка формируется той же единой однотяжной полинуклеотидной цепью за счет ее скручивания и попарного Н-взаимодействия смежных районов цепи с образованием коротких двуспиральных участков, расположенных перпендикулярно длинной оси палочки. Наконец, компактный клубок образуется при высокой ионной силе, когда создается возможность для дополнительного Н-взаимодействия, включая взаимодействие между несмежными (отдаленными) районами свернутой цепи, и структура, как бы сшивается водородными связями между удаленными районами, переходя к клубкообразному состоянию.

Задача настоящей работы заключалась в том, чтобы попытаться проконтролировать указанные структурные представления путем прямого электронно-микроскопического исследования формы и размеров макромолекул высокополимерной РНК в различных условиях.

Для изучения был взят высокоочищенный препарат нативной — инфекционной — РНК из вируса табачной мозаики. Препарат получен как описано ранее (¹⁰), с дополнительной очисткой от возможных продуктов деполимеризации путем переосаждения из 1,5 М раствора хлористого натрия. РНК обнаруживала «температурный эффект» (²), была биологически активной и имела молекулярный вес около 2 млн. Для растворения препарата употребляли ацетатно-аммониевый буфер рН 7 соответствующей ионной силы. Использовали три различные категории растворов: 1) раствор РНК в буфере с ионной силой 0,075 при комнатной температуре; 2) раствор РНК в буфере с ионной силой 0,0075 при комнатной температуре; 3) раство

РНК в буфере с ионной силой 0,00075, нагретый до 70°. Концентрация РНК варьировала в разных опытах от 0,0001 до 0,005%.

При приготовлении образцов для электронной микроскопии препарат наносили на поверхность свежего скола слюды с помощью пульверизатора. В случае исследования РНК при повышенной температуре нанесение препарата производили двумя способами: 1) путем пульверизации нагретого раствора РНК (около 70°) на подогретую слюду, непосредственно в термостате; 2) путем погружения подогретой слюды в горячий (70°) раствор РНК. Последнее было вызвано тем, что пульверизация приводила к известной фрагментации частиц РНК, особенно выраженной в данном случае.

При исследовании препаратов применяли метод одноступенчатых углеродных реплик ⁽¹¹⁾ с использованием предварительного оттенения сплавом платины с палладием под углом, соответствующем отношению высоты объекта к длине тени от 1 : 7 до 1 : 10. После оттенения и нанесения углерода полученную углеродно-металлическую пленку отделяли в воде от поверхности слюды и вылавливали на поддерживающую сетку.

Микрофотографии с реплик получены на японском электронном микроскопе JEM-5G с использованием ускоряющего напряжения 80 кВ при электронно-оптическом увеличении 18 000.

Высоту объекта оценивали по длине тени на микрофотографиях. С целью уменьшения ошибки в оценке высоты объекта, для определения «местного» угла оттенения на поверхность слюды после нанесения препарата наносили частицы латекса полистирола. В наших исследованиях точность оценки высоты объекта, учитывающая точность установки угла оттенения и правильность определения увеличения, составляла $\pm 6\%$.

На рис. 1 (см. вкл. стр. 619) представлена электронная микрофотография частиц РНК, когда для приготовления образца использовали растворы с большой ионной силой (0,075) при комнатной температуре. На фотографии видны клубкообразные частицы с диаметром (если не принимать в расчет агрегаты из двух или более клубков) около 400 Å. Их высота, рассчитанная по длине тени, соответствует при этом ~ 35 Å. Таким образом, в данных условиях молекулы высокополимерной вирусной РНК выявляются как довольно однообразные клубки, размеры которых в общем соответствуют молекулярному объему частиц РНК с молекулярным весом 2 млн. ($2 \cdot 10^6$ Å³).

Микрофотография частиц РНК в случае, когда препарат готовили из растворов с низкой ионной силой (0,0075) при комнатной температуре, представлена на рис. 2 (см. вкл. стр. 619). В данном случае частицы РНК выглядят как палочки с длиной от 2500 Å. Высота палочек, рассчитанная по длине тени, варьирует в основном в пределах от 26 до 31 Å, и за этими пределами кривая распределения высот круто обрывается. Молекулярный объем, рассчитанный по этим данным (если принять длину целой неповрежденной палочки в 2500 Å), составляет около $2 \cdot 10^6$ Å³, что соответствует объему одной молекулы РНК с молекулярным весом 2 млн.

Останавливаясь на рис. 2, следует в первую очередь отметить, что сам по себе факт обнаружения молекул РНК при низкой ионной силе и комнатной температуре в виде палочкообразных частиц полностью согласуется с высказанной ранее схемой конфигурационных переходов макромолекул РНК в растворе и с предположением о палочкообразной форме этих макромолекул в данных условиях ⁽⁴⁾.

Далее, при рассмотрении вопроса о том, чему соответствует высота лежащих на подложке палочек (26—31 Å) на рис. 2, интересно сопоставить полученные размеры с некоторыми параметрами, характеризующими двойную полирибонуклеотидную спираль. Так, известно, что диаметр правильной двойной полирибонуклеотидной спирали при малой влажности или в сухом состоянии равен 25—26 Å, а длина одного полного витка, включающего 10 пар нуклеотидов, составляет при этом 30—32 Å ⁽¹²⁾. Если исходить из предложенной ранее схемы третичной структуры палочкообразных частиц

РНК^(1, 7), то можно дать следующее объяснение полученным в настоящей работе размерам. При нанесении палочкообразной молекулы РНК на подложку ее короткие двуспиральные участки, ориентированные перпендикулярно длинной оси палочки^(1, 7), будут ложиться местами «плашмя», параллельно подложке, местами «торчком», перпендикулярно подложке, а местами, по-видимому, могут занимать промежуточное положение, располагаясь своей осью под тем или иным углом к подложке. В таком случае высота лежащей на подложке палочки должна быть неравномерной, так как в местах, где двуспиральные участки расположатся «плашмя», высота будет равна диаметру двойной спирали, т. е. 26 Å, а в местах, где эти участки встанут «торчком», высота палочки будет равна длине спиральных участков. Так как высота палочек на значительной части их протяженности составляет 30—32 Å, можно думать, что средняя длина коротких двуспиральных участков в высокополимерной РНК составляет около одного полного витка. Это, между прочим, согласуется со схемой вторичной структуры РНК, развиваемой в лаборатории Доти из чисто теоретических представлений⁽¹³⁾. Таким образом, найденный размер в 26 Å характеризует, по-видимому, места, где высоту лежащей палочки составляет диаметр двуспиральных участков (двуспиральные участки лежат «плашмя» на подложке); размер 30—32 Å может характеризовать те места, где высота лежащей палочки определяется длиной стоящих «торчком» (перпендикулярно к подложке или близко к этому) спиралей со средней длиной около одного витка.

Рис. 3 (см. вкл. стр. 619) показывает вид молекулы РНК, когда образец готовили путем нанесения на подогретую слюду горячего (70°) раствора РНК ($C=0,0001\%$) в 0,00075 М буфере. В этом случае, как видно, молекула РНК представляет собой длинную непрерывную нить очень малой толщины. Расчет ее высоты по тени указывает на величину 6—7 Å, что соответствует толщине (диаметру) однотяжной полинуклеотидной цепи в сухом состоянии. Выявление такой полностью развернутой структуры при использовании горячего раствора представляет собой прямое наблюдение обнаруженного ранее структурного перехода макромолекул РНК под действием нагревания⁽²⁾.

Итак, путем электронной микроскопии обнаружены три различные конфигурации высокополимерной РНК: клубок (в условиях высокой ионной силы при комнатной температуре), палочка (в условиях низкой ионной силы при комнатной температуре) и развернутая нить (при 70°). Наблюдение этих конфигураций в соответствующих условиях подтверждает высказанные ранее представления о макромолекулярной структуре высокополимерной РНК в растворе⁽⁴⁾.

Институт кристаллографии
Академии наук СССР
Институт биохимии им. А. Н. Баха
Академии наук СССР

Поступило
2 III 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. S. Spirin, J. Mol. Biol., 2, 436 (1960). ² Л. П. Гаврилова, А. С. Спирин, А. Н. Белозерский, ДАН, 126, 1211 (1959). ³ А. С. Спирин, Л. П. Гаврилова, С. Е. Бреслер, М. И. Мосевичкий, Биохимия, 24, 938 (1959). ⁴ R. Haschemeyer, B. Singer, H. Fraenkel-Conrat, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 313 (1959). ⁵ R. A. Cox, U. Z. Littauer, Nature, 184, 818 (1959). ⁶ А. С. Спирин, Л. С. Мильман, ДАН, 134, 717 (1960). ⁷ Г. А. Дворкин, А. С. Спирин, ДАН, 135, 987 (1960). ⁸ R. G. Hopkins, R. L. Sinsheimer, Biochim. et biophys. acta, 17, 476 (1955). ⁹ R. G. Hart, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41, 261 (1955); Biochim. et biophys. acta, 28, 457 (1958). ¹⁰ Л. П. Гаврилова, А. С. Спирин, Биохимия, 24, 503 (1959). ¹¹ D. E. Bradley, J. Appl. Phys., 27, 1399 (1953). ¹² А. Рич, Химические основы наследственности, ИЛ, 1960, стр. 451. ¹³ J. R. Fresco, B. M. Alberts, P. Doty, Nature, 188, 98 (1960).

Е. Л. РОЗЕНФЕЛЬД и И. С. ЛУКОМСКАЯ

О СПЕЦИФИЧНОСТИ ПОЛИ- И ОЛИГОГЛЮКОЗИДАЗ

(Представлено академиком А. И. Опариным 28 XII 1960)

Ферменты, катализирующие разрыв глюкозидных связей в молекулах полимеров глюкозы, отличаются высокой специфичностью. Расщепление 1,6-, α -1,4- и других типов связей в молекулах сахаридов осуществляется различными глюкозидазами. Глюкозные остатки, расположенные на периферии и в «ядре» молекул полиглюкозидов, также подвергаются действию различных экзо- и эндополиглюкозидаз. Работами последних лет показано, что расщепление одних и тех же связей в субстратах, отличающихся тонким строением или степенью полимеризации, происходит под действием различных ферментов. Так R-энзим (I) вызывает гидролиз связей ветвлений (α -1,6-связей) в молекулах полисахаридов в том лишь случае, если точки ветвлений в молекулах разделены между собой по крайней мере пятью глюкозными остатками, что имеет место у амилопектинов и некоторых «аномальных» гликогенов (2). Специфичность фермента связана в данном случае со средней длиной внутренних ветвей молекул субстрата.

Тот же R-энзим не расщепляет α -1,6-связей в молекулах «конечных» α -декстринов. Напротив «конечная» α -декстриназа (limit dextrinase) расщепляет «конечные» α -декстрины, но не действует на амилопектин (3). Олиго- α -1,6-глюкозидаз слизистой кишечника также расщепляет α -1,6-связи в олигосахаридах и не расщепляет эти же связи в полисахаридах (4).

В печени, селезенке и других органах животных имеются α -1,6-декстранглюкозидаза, расщепляющая конечные α -1,6-связи в декстранине, и изомальтаза, расщепляющая изомальтозу и изомальтотриозу, но не расщепляющая декстрана. Оба фермента легко отделяемы друг от друга (5, 6).

В настоящем сообщении приводятся данные, свидетельствующие о том, что α -1,4-связи в мальтозе и мальтотриозе расщепляются ферментом, не расщепляющим гликоген. Этот факт представляет особый интерес в связи с тем, что препараты α -1,4-экзополиглюкозы как растительного, так и животного происхождения не удавалось отделить от фермента, расщепляющего мальтозу (7).

Ферментный препарат получали следующим образом. Из водного экстракта ацетонового препарата печени кролика выделяли белковую фракцию 3—0,5 насыщения $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. После многократного переосаждения сернокислым аммонием отдиализованная белковая фракция, соответствующая 3—0,5 насыщениям $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, использовалась в опыте. Выделение фер-

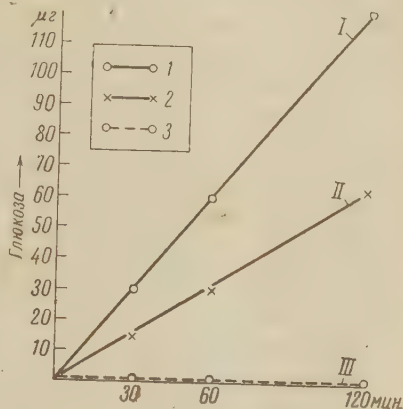


Рис. 1. Расщепление мальтозы (I), мальтотриозы (II) и гликогена (III) ферментным препаратом печени. Инкубация проводилась при 37°. Состав инкубационной смеси: I — 1,5 мл фермента (рН 6,8) + 15 μ мол. мальтозы; II — 1,5 мл фермента рН 6,8) + 15 μ мол. мальтотриозы; III — 1,5 мл фермента + 30 мг гликогена. На определение брались по 0,15 мл

мента проводили в условиях нейтрального pH. В опытах использовал хроматографически чистую мальтозу и мальтотриозу.

О расщеплении мальтозы, мальтотриозы и гликогена ферментным препаратом мы судили по количеству образующейся глюкозы, которая определялась специфическим глюкозооксидазным методом⁽⁸⁾. Сущность метода

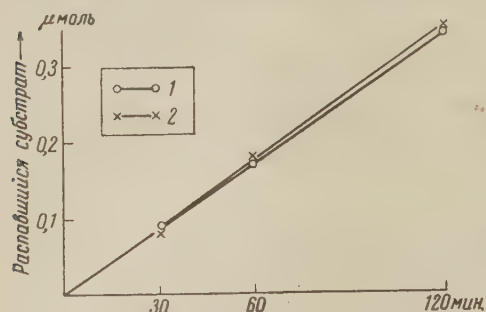


Рис. 2. Ферментативное расщепление мальтозы (1) и мальтотриозы (2). Состав инкубационной смеси тот же, что на рис. 1.

заключается в том, что к безбелковому раствору, содержащему глюкозу, добавляют реактив, состоящий из глюкозооксидазы, пероксидазы и *o*-толидина. Глюкозооксидаза окисляет глюкозу в присутствии O_2 до δ -глюконолактона с одновременным образованием перекиси водорода. Пероксидаза разлагает перекись водорода, окисляя *o*-толидин, который из бесцветного соединения переходит в окисленную окрашенную в синий цвет форму. Интенсивность окраски пропорциональна количеству глюкозы. Глюкозооксидазный метод позволяет определять глюкозу в присутствии мальтозы и других сахаров. Помимо глюкозооксидазного метода расщепление мальтозы, мальтотриозы и гликогена определялось методом хроматографии на бумаге. Как видно из рис. 1, ферментный препарат не расщеплял гликогена, но расщеплял мальтозу и мальтотриозу. При расщеплении мальтозы (рис. 1) образование глюкозы было вдвое большее, чем при расщеплении эквимольного количества мальтотриозы. Это объясняется тем, что при распаде мальтозы образуются две молекулы глюкозы, а при расщеплении мальтотриозы — одна молекула глюкозы и одна молекула мальтозы. Если выразить полученные результаты в микромолях распавшегося субстрата (рис. 2), то видно, что распад мальтозы и мальтотриозы под действием ферментного препарата протекает с одинаковой скоростью.

Результаты, полученные глюкозооксидазным методом, были подтверждены данными хроматографического анализа, показавшего, что ферментный препарат, не расщеплявший гликогена, в то же время рас-

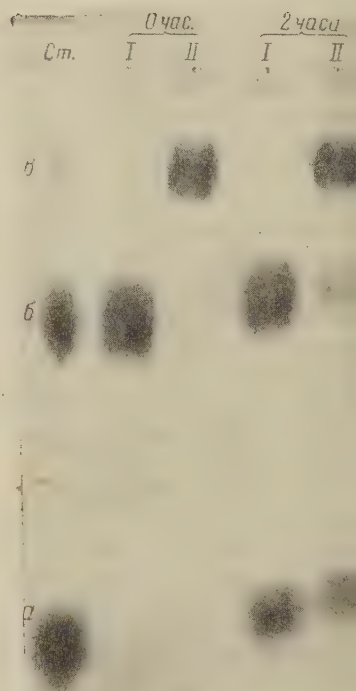


Рис. 3. Расщепление мальтозы и мальтотриозы ферментным препаратом печени. Ст — стандарты: а — глюкоза, б — мальтоза, в — мальтотриоза. Состав инкубационной смеси: I — 3 мг мальтозы + 0,5 мл фермента (pH 6,8); II — 4 мг мальтотриозы + 0,5 мл фермента (pH 6,8). На хроматограмму наносилось по 50 μ л инкубационной смеси (после осаждения белков). Длительность инкубации указана сверху.

щеплял мальтозу и мальтотриозу (рис. 3). Приведенные опыты позволяют сделать заключение, что расщепление мальтозы и мальтотриозы осуществляется ферментом, отличным от ферментов, расщепляющих гликоген, подобно тому как расщепление изомальтозы происходит под действием фермента, отличного от фермента, расщепляющего декстран.

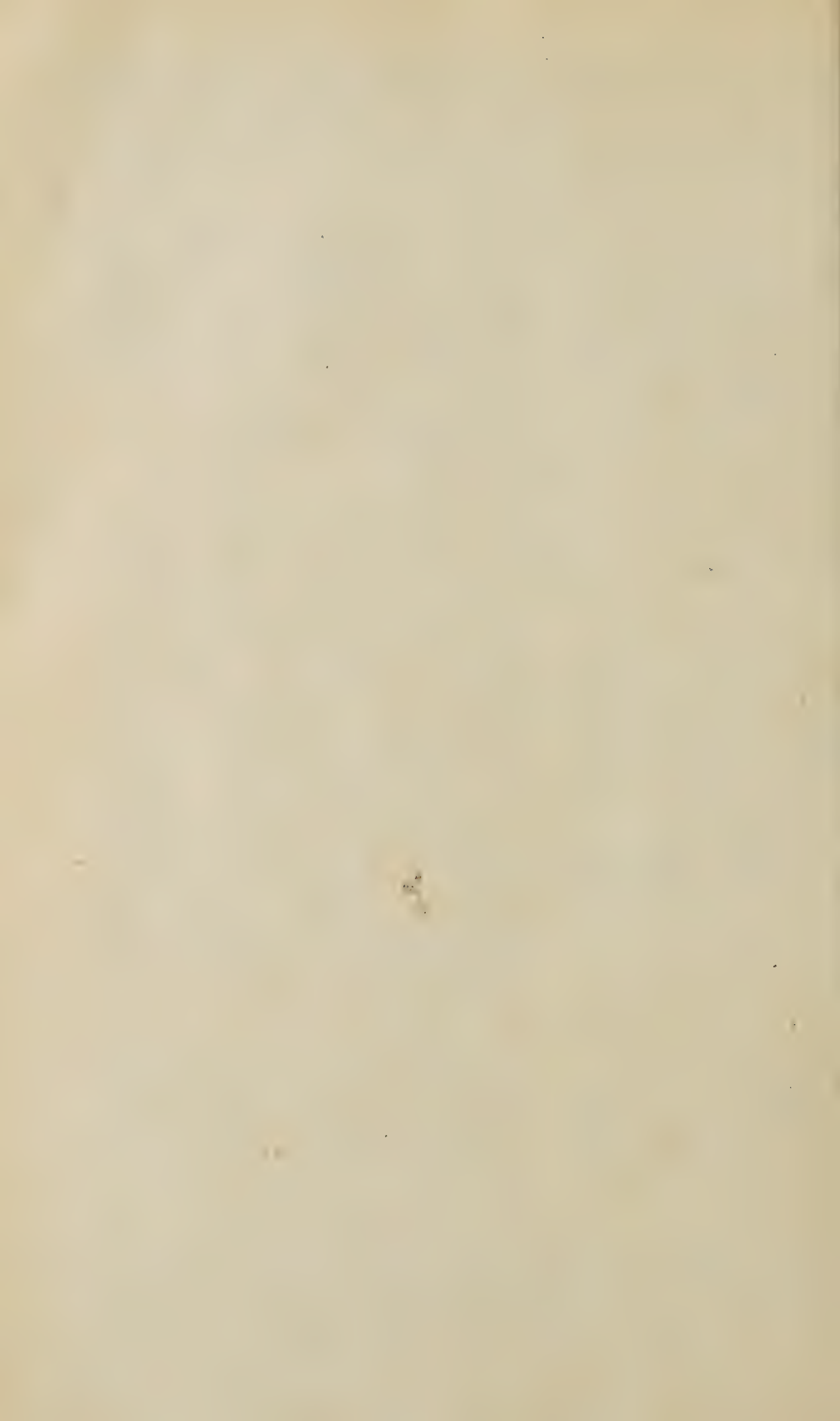
Таким образом, наблюдается высокая специфичность гидролитических ферментов не только в отношении олиго- и полисахаридов с α -1,6-связями, но и в отношении олиго- и полисахаридов с α -1,4-связями.

Институт биологической и медицинской химии
Академии медицинских наук СССР

Поступило
26 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Peat, W. Whelan et al., J. Chem. Soc., 1954, 4440. ² J. D. Fleming, D. J. Manners, Chem. and Ind., 1958, 831. ³ J. MacWilliam, Nature, 181, 1143 (1958). ⁴ J. Larner, C. McNickle, K. Biol. Chem., 215, 723 (1955). ⁵ E. L. Rosenfeld, J. S. Lukomskaia, Clin. chim. acta, 2, 105 (1957). ⁶ И. С. Лукомская, Расщепление декстрана и изомальтозы ферментными препаратами из различных тканей животных, Диссертация, М., 1958. ⁷ Е. Л. Розенфельд, Актуальные вопросы современной биохимии. «Химия и механизм действия ферментов», 2, 1961 (в печати). ⁸ И. С. Лукомская, В. К. Городецкий, Вопр. мед. хим., № 6 (1960).



ЭКОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

И. Г. 303 и Н. А. ЧЕРНЫХ

К БИОЛОГИИ *ERIOSYNAPHE LONGIFOLIA* (FISCH.) DC.

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 18.1.1961)

Пушистоспайник длиннолистный — редкое, эндемическое растение на южных степях и полупустынь, данные о котором недостаточны, а иногда и неточны. В предлагаемой заметке сообщаются новые сведения о его распространении, морфологии и жизненной форме.

Во «Флоре СССР» ⁽¹⁾ *E. longifolia* указан для следующих ботанических айонов: Заволжья, Волжско-Камского (юг), Нижне-Донского, Нижне-Волжского, Верхне-Тобольского (юго-запад), Предкавказья, Арало-Каспийского (север). Не указано Причерноморье, где растение приводится ⁽²⁾

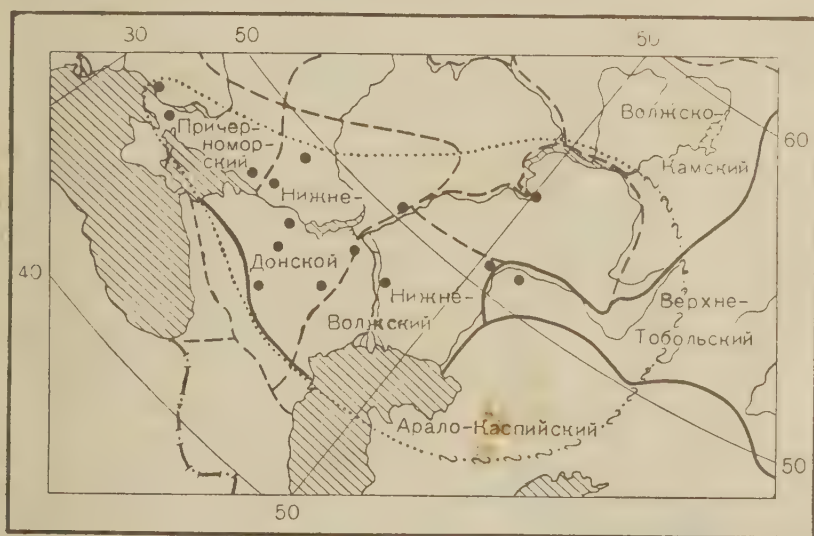


Рис. 1. Карта распространения пушистоспайника длиннолистного (восточная часть ареала очерчена схематично)

тия Николаева (Горобчанская коса), Аскании-Нова и Провальской целинной степи. Авторам заметки известны также местонахождения пушистоспайника на Старобельщине (Стрелецкая степь) и на о. Чурюке (Азово-Ивановский государственный заповедник), где растение собрано на глинистых склонах к Сивашу с почти зрелыми плодами на главном зонтике и неразвитыми на боковых. Здесь же 21—25 VII 1952 г. собран мелкий, до 10 см высотой цветущий экземпляр (рис. 1).

В морфологическом отношении ботаническое описание следует дополнить и исправить такими данными. Растение имеет подземные клубни. Плоды продолговатые или продолговато-обратно-яйцевидные, 7—11(13) мм длиной (а не до 9 мм ^(1, 2, 4, 9)) и 5—6 мм шириной. На поперечном срезе плода анализев 6: по одному (а не по три ^(1, 2, 4)) в ложбинках и два на комисуре (рис. 2).

Большой знаток южных степей и тонкий наблюдатель И. К. Пачоский⁽³⁾ оставил несколько ценных замечаний об этом интереснейшем растении. Он полагает, что *E. longifolia* несомненно является «ответным местным растением» и встречается почти по всей степи, хотя в обычные годы оно

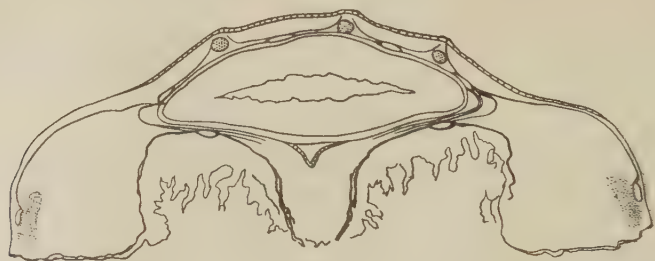


Рис. 2. Поперечный разрез плода пушистоспайника

«столь редко, что ускользает от наблюдения...; попадаетсся единичными экземплярами, реже по 2—3 вблизи друг от друга». Вместе с тем он отмечает случай, когда на небольшом расстоянии один от другого произрастали 6 экземпляров *E. longifolia*. И. К. Пачоский, которому «ни разу не приходилось видеть почек возобновления», считает это растение двулетним, а не многолетним, как полагал И. Ф. Шмальгаузен. Он пишет, что после плодоношения все растение, исключая корни, отмирает. Многие авторы^(1, 2, 4, 6) считают *E. longifolia* многолетником. Корни его имеют особый аромат и применяются в пищу как овощи^(8, 9).

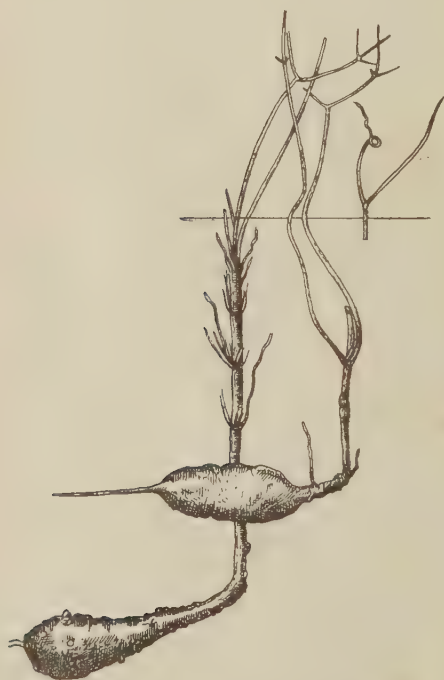


Рис. 3. Молодые растения пушистоспайника, развившиеся из клубней

При раскопке крупного, до 1 м высотой и 1,8 см толщиной у корневой шейки, плодоносящего экземпляра нами было обнаружено в непосредственной близости от него несколько молодых растений, имеющих только розетку из нескольких листьев. Плодущий экземпляр имел мощное вертикальное корневище, утолщенное на глубине 15—20 см (материнский клубень). От него наклонно вглубь и параллельно поверхности земли в радиальных направлениях отходили боковые ответвления, которые свою очередь тоже ветвились и утолщались на концах, образуя мощную многоярусную систему клубней и клубеньков. Некоторые из этих клубней из верхушечной почки образуют подземные побеги, развивающиеся на дневной поверхности в розетки листьев, которые дают начало новым надземным побегам. Таким образом, пушистоспайник является клубневым геофитом, образующим многолетние монокарпические побеги. С отмиранием от плодоносившего надземного побега отмирает и часть клубней, запасные питательные вещества которых израсходованы на цветение и плодоношение. Оставшиеся в земле

клубни продолжают вегетировать, образуя новые надземные побеги и клубни (рис. 3).

В развитии растения бросается в глаза огромная способность к вегетативному размножению и недоразвитие плодов на всех боковых зонтиках, что предполагает наличие тесной корреляции между вегетативным и репродуктивным размножением. Попытки прорастить плоды пушистоспайника пока не дали положительных результатов.

Сравнительный анализ семян пушистоспайника, нескольких видов смежного рода *Ferula* и рода *Ferulago* показал явное недоразвитие зародыша *Eriosynaphe* (табл. 1). Следует отметить также, что только 20% семян

Таблица 1

Растение	Размер семени, мм		Длина зародыша, мм
	длина	ширина	
<i>Eriosynaphe longifolia</i> (Fisch.) DC.	6—9	2,5—4	0,25—0,75
<i>Ferula orientalis</i> L.	7,5—11	4—5	3—4
<i>F. caspica</i> M. B.	5,5—6	3—4	0,75—0,15
<i>F. diversivittata</i> Rgl. et Schmalh.	9—10	5—5,5	4—5
<i>F. microloba</i> Boiss.	7,5—8	4—4,5	2,75—4
<i>F. nuda</i> Spreng.	6—5	2,5—3	0,25—1,5
<i>F. gumosa</i> Boiss.	11,5—13	4—5	4—4,5
<i>F. foliosa</i> Lysky.	11—13	5,5—6	3—4
<i>F. schair Borszcz.</i>	5—6	3	2—3
<i>Ferulago campestris</i> (Bess.) Grecesku.	9—10	4	2—3,5

Eriosynaphe имели зародыши до 0,75 мм длиной, 70% — от 0,25 до 0,5 мм, а 10% совсем не имели зародышей. Если в данном случае зародыши пушистоспайника не повреждаются сосущими насекомыми, на что имеются указания для многих видов зонтичных⁽⁶⁾, то наше предположение о наличии коррелятивных отношений между вегетативным и репродуктивным размножением с угасанием последнего подтверждается.

Харьковский научно-исследовательский
химико-фармацевтический институт

Поступило
15 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. К. Шишкин, Флора СССР, 17, Род Пушистоспайник — *Eriosynaphe* (Fisch.) DC., М.—Л., 1951. ² М. И. Котов, Флора УРСР, 7, Родина зонтичн. — Umbelliferae Moris., Київ, 1955. ³ И. К. Пачоский, Наблюдения над растительным покровом степей Аскания-Нова в 1922 г., Изв. гос. степн. заповедника Аскания-Нова, 2, Херсон, 1923. ⁴ Ю. Н. Воронов, Флора Юго-Востока Европ. части СССР, в. 5, М.—Л., 1931. ⁵ R. W. Robinson, Bot. Rev., 20, № 9, 531 (1954). ⁶ И. Ф. Шмальгаузен, Флора Ср. и Южн. России, Крыма и Сев. Кавказа, 1, 1895. ⁷ Б. А. Федченко, Растительность Туркестана, 1915. ⁸ А. А. Гроссгейм, Раст. богатства Кавказа, М., 1932. ⁹ А. А. Гроссгейм, Определитель растений Кавказа, М., 1949.

Н. Г. ДОМАН, А. К. РОМАНОВА и З. А. ТЕРЕНТЬЕВА

ПРЕВРАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛЕТУЧИХ ОРГАНИЧЕСКИХ
Веществ, поглощенных листьями из атмосферы

(Представлено академиком А. Л. Курсановым 7 I 1961)

Известно, что нижние слои атмосферы почти всегда содержат некоторое количество летучих органических веществ, образуемых в результате жизнедеятельности различных организмов, промышленной деятельности человека и геохимических процессов.

Хотя обычное содержание этих веществ в воздухе незначительно (¹), тем не менее наличие их является практически постоянным фактором, в той или иной мере прямо или косвенно влияющим на процессы жизнедеятельности организмов (²⁻⁴).

Согласно данным Холодного (⁴), летучие органические вещества в значительной части поглощаются почвой и воздействуют главным образом на корневую систему растений и на микрофлору. Однако поглощение указанных веществ надземной частью растений почти не исследовалось, хотя, казалось бы, летучие органические вещества, находящиеся в атмосфере прежде всего должны воздействовать на листья, как органы, специально приспособленные для выполнения функции воздушного питания. Можно ожидать, что именно в этих органах, наиболее интенсивно осуществляющих разнообразные синтетические процессы, имеются наибольшие возможности превращений различных органических веществ. Очевидно также, что листья наряду с корнями, еще сохранили черты эволюционно более старого гетеротрофного типа обмена веществ и способны к питанию разнообразными органическими веществами, сочетая его с фотоассимиляцией.

В настоящей работе проводилось сравнительное изучение поглощения листьями из атмосферы небольших концентраций меченных по углероду монокарбоновых соединений с различной степенью восстановленности метилового спирта, формальдегида, муравьиной кислоты и углекислоты. Превращение этих веществ не только может служить принципиальной моделью ассимиляции многих других соединений, но и представляет исключительный интерес ввиду большой вероятности участия фрагментов монокарбоновых соединений в самых разнообразных переносных реакциях.

Изучение пути превращения названных монокарбоновых соединений представляет и частный интерес, поскольку все они, а особенно муравьиная кислота, известны как биохимически активные вещества, встречающиеся в растительных тканях. Но среди значительного числа работ (⁵⁻¹⁰), посвященных превращениям этих веществ в растительных тканях, нет ни одной, дающей возможность проследить весь путь их превращений в листьях при нормальных условиях и особенно — проследить его начальные стадии.

Для исследования были взяты листья фасоли и ячменя. Навеска свежих листьев помещалась в специальную сеточку-держатель и вводилась в плавающую под ртутью прозрачную камеру (¹¹), наполненную разреженными парами (в воздухе) одного из следующих меченых соединений: муравьиной кислоты, муравьиного альдегида, метилового спирта, $C^{14}O_2$. Опыты ставились при освещенности 2000 лк и в темноте; в атмосфере, лишенной CO_2 , и в

присутствии 5% CO₂. Температура воздуха 25—26°. Продолжительность экспозиции в камере была 10; 60 и 300 сек. После экспозиции листья убивались быстрым погружением в кипящий 0,5% водный раствор муравьиной кислоты. Материал подвергался фракционному и радиохроматографическому анализу (¹², ¹³).

Таблица 1

Сравнение усвоения меченых монокарбоновых соединений листьями из воздуха на свету

Соединение	Концентрация в камере, об. %	Поглощено за 10 сек. на 1 г листьев, ммол. $\times 10^{-5}$		Было бы поглощено за 10 сек. на 1 г листьев фасоли при одинаковой концентр. (0,2 об. %) вещ. в камере	
		фасоль	ячмень	ммол. $\times 10^{-5}$	% к CO ₂
Муравьиная кислота	0,02	3,1	2,4	31,0	63,6
Формальдегид	1,1	16,6	20,6	3,0	6,2
Метиловый спирт	1,0	6,6	4,9	1,3	2,7
CO ₂	0,2	49,1		49,1	100

В табл. 1 указаны концентрации радиоактивных веществ в камерах и приведены данные по скорости поглощения их листьями фасоли и ячменя на свету.

Несомненно, что наилучшим было бы сравнивать поглощение исследуемых веществ при одинаковых концентрациях их в атмосфере. Но это делать было нецелесообразно, прежде всего, по причине резко различающейся удельной радиоактивности препаратов этих соединений. Поэтому, исходя из предварительных данных, пришлось создавать концентрации радиоактивных веществ в атмосфере, оптимальные для условий этого опыта.

Можно предположить, что по аналогии с ассимиляцией CO₂ поглощение летучих органических веществ листьями в известных пределах (¹⁴) будет пропорциональным их концентрации в атмосфере. Если допустить это возможным в отношении тех небольших концентраций, которые применялись в настоящем опыте, и условно экстраполировать поглощение всех веществ концентрации одного из них, например концентрации CO₂, то станет ясной картина сравнительной поглощаемости исследуемых веществ. Из данных, полученных с помощью такой экстраполяции и приведенных в двух последних графах табл. 1, следует, что листья растений способны сравнительно интенсивно поглощать из атмосферы различные органические монокарбоновые соединения. По скорости поглощения после углекислоты идет муравьиная кислота, затем, заметно отставая, формальдегид и, наконец, метиловый спирт.

Данные, представленные в табл. 2, показывают, что влияние углекислого газа на скорость усвоения листьями монокарбоновых производных весьма зависит от степени их восстановленности. Наибольший тормозящий эффект CO₂ обнаруживается при усвоении листьями на свету паров муравьиной кислоты, затем — формальдегида. В присутствии 5% CO₂ ассимиляция метилового спирта листьями ячменя практически не снижается, а листьями фасоли — даже увеличивается. Эта особенность ассимиляции метилового спирта трудно объяснима. Необходимо отметить, что усвоение листьями всех исследованных веществ в темноте во много раз слабее, чем на свету, что тормозящего действия CO₂ при темновой фиксации муравьиной кислоты, формальдегида и метилового спирта не наблюдается.

Изучение данных о скорости усвоения листьями паров муравьиной кислоты, формальдегида и метилового спирта в зависимости от освещения и присутствия CO₂ в воздухе наводит на мысль о наличии в растительных тканях как общих путей превращений всех указанных веществ, так и путей специфических. Это положение полностью подтвердилось при изучении данных радиохроматографического и ионообменного анализа.

Таблица 2

Ассимиляция меченых монокарбоновых органических соединений листьями из воздуха при различных условиях

Соединение	Условия экспозиции	Радиоактивность на 1/г листьев, расп/мин $\times 10^{-3}$			
		фасоль		ячмень	
		-CO ₂	+CO ₂	-CO ₂	+CO ₂
Муравьиная кислота	10 сек., свет	126,3	28,5	72,6	6,7
	60 » »	416,0	45,1	210,4	9,6
	300 » »	803,2	57,6	212,0	23,6
	300 сек., темнота	106,0	48,8	17,7	16,0
Формальдегид	10 сек., свет	22,7	20,4	27,8	17,0
	60 » »	119,8	69,3	99,0	40,5
	300 » »	211,6	114,4	279,1	127,5
	300 сек., темнота	21,8	22,6	31,7	44,9
Метиловый спирт*	10 сек., свет	14,7	18,2	10,7	17,7
	60 » »	41,6	62,7	26,9	26,9
	300 » »	94,7	201,2	112,5	104,5
	300 сек., темнота	73,9	49,5	88,4	60,2

Так, при 10-секундной фотоассимиляции паров муравьиной кислоты в отсутствие CO₂ подавляющая часть радиоактивности обнаруживается в фосфорных эфирах. При увеличении экспозиции до 1 и 5 мин. радиоактивность обнаруживается также в глюкозе, α -аланине, сахарозе, фруктозе, аспарагиновой кислоте, серине, гликолевой и глицериновой кислотах и нескольких неидентифицированных веществах. Характерно нарастание процента радиоактивности аспарагиновой кислоты в листьях фасоли и α -аланина в листьях ячменя, сопровождающееся резким снижением процента меченых веществ, разрушающихся в порах сильного катионита КУ-1. Присутствие в атмосфере CO₂ резко тормозит включение C¹⁴ муравьиной кислоты в фосфорные эфиры и затем в сахара. Поэтому при коротких экспозициях в зонах расположения фосфорных эфиров, гликолевой кислоты и серина на хроматограммах обнаруживается радиоактивность примерно одного порядка. В темновых опытах радиоактивность в первую очередь наблюдается в гликолевой кислоте, серине и аспарагиновой кислоте.

Изложенные факты превращений муравьиной кислоты свидетельствуют о том, что ее ассимиляция осуществляется главным образом по фотосинтетическому пути с предварительным окислением до CO₂ посредством активного действующего фермента типа формикодегидразы, обнаруженного в семенах бобовых (¹⁵, ¹⁶). Кроме этого основного пути превращений муравьиной кислоты происходит ее усвоение путем непосредственного включения в серин (¹⁷).

При кратковременной фотоассимиляции меченого формальдегида значительная часть его радиоактивности сосредоточена также в фосфорных эфирах. Затем метка накапливается в α -аланине, серине, аспарагиновой кислоте и нескольких неидентифицированных веществах, располагающихся на хроматограммах в зоне далеко продвигающихся аминокислот — таких как фенилаланин, лейцин и т. п. Присутствие CO₂ в атмосфере в данном случае мало влияет на распределение радиоактивности между продуктами. В темновых опытах интенсивно метятся неидентифицированные продукты, далеко продвигающиеся на хроматограммах.

Одним из первых продуктов фотоассимиляции меченого метилового спирта листьями фасоли и ячменя, как и в предыдущих случаях, оказались фосфорные эфиры, затем появляются меченые аминокислоты. Очень рано образуется неидентифицированный продукт, далеко продвигающийся на

роматограммах. Это же вещество ответственно за подавляющую часть радиоактивности экстракта при темновой фиксации меченого метилового пирта.

Таким образом, листья растений способны интенсивно усваивать на свету через посредство фотосинтетического аппарата пары таких органических веществ, как муравьиная кислота, формальдегид, метиловый спирт, образуя продукты, качественный состав и последовательность появления которых близки к наблюдаемым при ассимиляции CO_2 . Помимо основного окислительного пути превращений указанных веществ, для каждого из них характерны также иные превращения, хорошо происходящие, по-видимому, в темноте.

Можно думать, что отмеченная способность листьев интенсивно усваивать на свету некоторые органические летучие вещества представляет собой «пережиток» гетеротрофности, сочетающейся с фотоассимиляцией.

Поступило
5 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Бурксер, М. И. Дайн, *Вопр. курортологии*, № 4 (1940). ² Н. Мо-
sch, *Der Einfluss einer Pflanze auf die andere—Allelopathie*, Jena, 1937. ³ Б. П. То-
ин, *Фитонциды*, М., 1951. ⁴ Н. Г. Холодный, *Природа*, № 2, 43 (1951).
E. Krotkov, P. V. Vittorio, G. B. Reed, *Arch. Biochem. and Biophys.*, **51**,
7 (1954). ⁶ И. Колесникова, *Усп. совр. биол.*, **157**, 49 (1959). ⁷ A. K gall,
Tolbert, *Plant Physiol.*, **32**, 321 (1957). ⁸ V. Zbinovsky, R. Burris,
ant Physiol., **27**, 240 (1952). ⁹ G. Klein, O. Werner, *Biochem. Zs.*, **168**, 361 (1926).
Ю. В. Ракитин, А. В. Крылов, Г. А. Тараканова, *ДАН*, **116**, № 5,
4 (1957). ¹¹ Н. Г. Доман, *Проблемы фотосинтеза*, Изд. АН СССР, 1959, стр. 264.
Н. Г. Доман, *Тр. комисс. анал. химии*, **6** (9), 452 (1955). ¹³ Н. Г. Доман,
М. Кузин и др., *ДАН*, **86**, 389 (1952). ¹⁴ В. А. Бриллиант, *Тр. БИН*,
с. 4, *эксп. бот.*, № 1, 103 (1934). ¹⁵ D. Davison, *Biochem. J.*, **49**, 520 (1951).
M. Mathews, B. Vennesland, *J. Biol. Chem.*, **186**, 667 (1950). ¹⁷ A. Wil-
dson, D. Davis, *Nature*, **181**, 4615, 1070 (1958).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

Л. Б. БЕРЛИН и М. М. НЕЗДАТНЫЙ

**ГИСТОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ГОМОТРАНСПЛАНТАЦИИ
КОНСЕРВИРОВАННОЙ КОЖИ КРОЛИКА**

(Представлено академиком Н. Н. Аничковым 6 I 1961)

Пересадка тканей и органов, в том числе и кожи, имеющая не только общепатологический интерес, но и большое практическое значение, привлекает внимание представителей разных специальностей (¹⁻⁸). Гистологические процессы изучены более подробно при аутоотрансплантации кожи экспериментальных животных и человека (⁹⁻¹⁵), а изменения тканей кожи при гомопластике сообщаются в немногих исследованиях (¹⁶⁻²⁰). Большинство авторов (^{3, 21}) считают, что гомотрансплантаты не приживаются вследствие иммуно-биологической несовместимости тканей донора и реципиента. Для ее преодоления среди многих других способов была предложена консервация кожи при температуре от +2 до +4° (²²⁻²⁴). Единичные исследования выполнены с применением замораживания лоскутов при -3° (²⁵). В настоящей работе приводится гистологический анализ изменений пересаженной кожи кролика — донора, консервированной в условиях замораживания и окружающей кожи реципиента.

Материалом для исследования служили гомотрансплантаты кожи наружной поверхности уха кроликов. Лоскуты, имевшие форму круга диаметром 2 см и включавшие эпидермис и все слои дермы с придатками кожи, сохранялись 9 суток при -3° (в электрохолодильнике). Было установлено, что при консервации в этих условиях в коже не появляются видимых изменений. Перед пересадкой на внутренней поверхности уха кролика подготавливалось ложе срезанием лоскута такого же размера, на которое и пересаживался консервированный кожный лоскут. Он фиксировался давящей повязкой и сшиванием краев уха. Материал взят в сроки от 15 мин. до 17 суток после гомопластики. Фиксация всего гомотрансплантата с окружающей кожей реципиента 10% раствором формалина. Заливка — в целлоидин. Срезы проведены по диаметру пересаженного лоскута поперек уха. Окраска гематоксилин-эозином.

Пересаженные лоскуты состоят из эпидермиса и всех слоев дермы, включая волосные фолликулы и железы. Консервированные в течение 9 суток при -3° лоскуты уже через 15 мин. после пересадки несколько отечны, а в остальном они не отличаются видимым образом от нормальной кожи наружной поверхности уха кролика. Лоскуты в большинстве случаев вплотную прилегают к ложу, представленному волокнистой соединительной тканью, переходящей без резких границ в надхрящницу (рис. 1 а). Лишь изредка между лоскутом и ложем вскоре после пересадки появляются более или менее обширные кровоизлияния, оттесняющие трансплантат наружу и ухудшающие условия его питания. В течение первого часа после пересадки соединительная ткань ложа инфильтрируется псевдоэозинофилами, проникающими на первых порах в лоскут. К концу первых суток после пластики, одновременно с началом питания гомотрансплантата путем диффузии питательных веществ из сосудов ложа, происходит проникновение псевдоэозинофильных лейкоцитов хозяина в лоскут. Вначале они обнару-

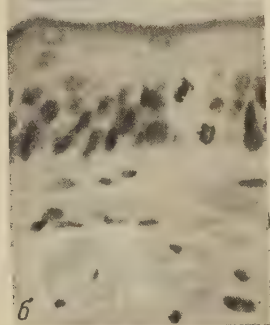
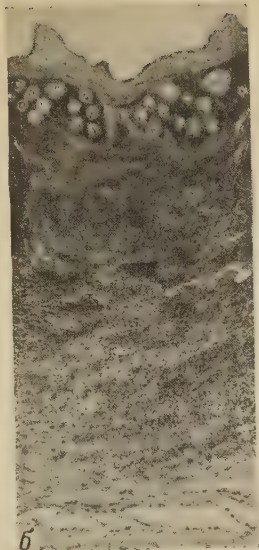
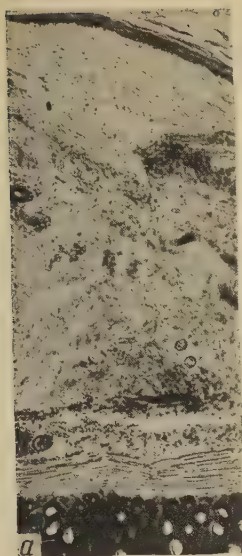


Рис. 1

Рис. 2

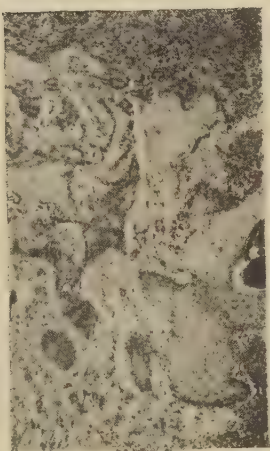
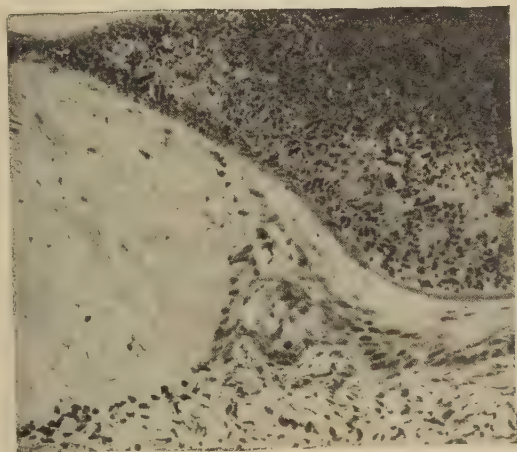


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 1. Участки гомотрансплантатов через 15 мин. (а), 4 суток (б) и 12 суток (в) после пересадки. а и б — ок. 7, об. 8 \times ; в — ок. 7, об. 40 \times

Рис. 2. Общий вид (а) и эпидермис (б) кожи наружной поверхности уха кролика. 2 суток после гомопластики на внутреннюю поверхность уха. а — ок. 7, об. 20 \times ; б — ок. 7, об. 40 \times

Рис. 3. Свободный край эпидермального регенерата, расположенного на грануляционной ткани реципиента и нежизнеспособной дерме гомотрансплантата. 17 суток. Ок. 7, об. 20 \times

Рис. 4. Разрастание эпителия реципиента под краевой частью гомотрансплантата. 15 суток. Ок. 7, об. 8 \times



живаются лишь в самых глубоких его частях в виде отдельных элементов, затем образуют небольшие скопления, а впоследствии располагаются мощным слоем в глубоких или даже более поверхностных частях гомотрансплантата. Некоторые лейкоциты проникают под эпидермис или даже внутрь него, скопляясь в щели, часто образующейся вследствие отложения ороговевших элементов от жизнеспособных. Между коллагенными пучками дермы лоскута появляются промежутки, занятые отечной жидкостью. По всей вероятности, это происходит вследствие превалирования притока жидкости над оттоком, которое имеет место и при аутопластике.

Через 2—3 суток после пересадки картина гомотрансплантата становится еще более пестрой. В краевых частях лоскут приобретает явные некробиотические и некротические признаки: ядра и цитоплазма клеток эпидермиса окрашиваются очень бледно, они располагаются своим длинником параллельно поверхности кожи даже в базальном слое. Между супрабазальным и ороговевшими слоями клеток скопляются и погибают псевдоэозинофилы. Клетки соединительной ткани в периферических частях лоскута погибают, коллагенные пучки теряют ясные контуры, спаиваются вместе, образуя однородные слабоокрашивающиеся эозином участки. На границе жизнеспособных и мертвых частей лоскута псевдоэозинофильные лейкоциты образуют демаркационный вал. В центральных частях лоскута преобладают не дистрофические, а пролиферативные изменения эпителиальных элементов, и эпидермис имеет жизнеспособный вид: ядра его клеток округлые, имеют хорошо различимые ядрышки и глыбки хроматина. Цитоплазма клеток эозинофильная. Местами на границе с участками погибшего эпидермиса поверхностный пласт образует небольшие регенераты — булавовидные утолщения эпителия, смещающегося в сторону микроскопических изъязвлений лоскута. Однако в отличие от аутоотрансплантата в цитоплазме клеток эпидермиса при этом не увеличивается количество РНК и не появляется гранулярный гликоген (14, 18). Еще более отчетливые пролиферативные изменения заметны в эпителии волосных фолликулов. Цитоплазма этих эпителиальных клеток, в отличие от элементов эпидермиса, базофильна, т. е. содержит значительное количество РНК. В некоторых клетках наружного волосяного влагалища видны фигуры митотического деления. Такое сочетание дистрофических и некробиотических изменений, с одной стороны, и пролиферативных — с другой, продолжается в гомотрансплантатах еще длительное время, даже когда погибшие участки появляются в центральных частях лоскута (рис. 1 б). Наряду с ними видны в течение всей первой недели после пересадки, а зачастую и позже, до 10 — 12 дня, явные пролиферативные и регенеративные изменения эпителия. Место погибшего к этому времени эпидермиса гомотрансплантата занимает вновь образованный покровный эпителиальный пласт, состоящий из нескольких слоев клеток с крупными овальными ядрами, в которых хорошо различимы ядрышки (рис. 1 в). Некоторые клетки делятся митозами. Цитоплазма этих клеток базофильна, т. е. богата РНК и лишена пигментных включений. Отсутствие последних является косвенным доказательством образования регенерата за счет эпителия придатков кожи, клетки которых лишены пигментных включений — в то время как эпидермис наружной поверхности уха кролика пигментирован.

Местами заметны разрастания жизнеспособного эпителия придатков кожи не по поверхности гомотрансплантата с образованием покровного пласта, а внутри лоскута, на границе его омертвевшей наружной части и глубоких частей, сохранивших признаки нормальной кожи. Эти разрастания эпителия имеют вид тонких двуслойных пластов, с почти неразличимой вертикальной анизоморфностью, растущих параллельно поверхности кожи. Между лоскутом и ложем образуется так называемый спайный слой — молодая грануляционная ткань, многочисленные клеточные элементы которой — как свободные (путем перемещения), так и оседлые (постепенным врастанием) — проникают в глубокие части гомотрансплантата. Однако в от-

личие от аутопластики (¹¹⁻¹³) и даже гомопластики кожи поросят после ожогов (²⁰) не удалось наблюдать активного врастания капиллярных отростков между коллагенными пучками лоскута.

С течением времени, примерно к 15—17 суткам, в пересаженных лоскутах исчезают имевшие раньше место пролиферативные явления. Гомотрансплантаты нацело погибают, превращаясь в отслаивающийся струп. Несколько иначе погибает гомотрансплантат у поросят (²⁰), когда его волокнистое межклеточное вещество после расплавления эпидермиса и некроза соединительнотканых клеток служит, по крайней мере, некоторое время «губкой», в которую врастают из спайного слоя клетки и капилляры реципиента. Впоследствии, конечно, межклеточное вещество лоскута рассасывается.

В тесной связи с процессами, происходящими в гомотрансплантате находятся изменения, наблюдаемые в коже реципиента, окружающей лоскут и даже находящейся на наружной поверхности уха, т. е. по другую сторону хрящевой пластинки. Уже через 1—2 суток после пересадки кожа наружной поверхности уха напротив места пересадки сильно утолщена, отекает, инфильтрирована псевдоэозинофильными лейкоцитами. Сосуды расширены и переполнены кровью (рис. 2 а). Эпидермис несколько утолщен, видны фигуры митотического деления в волосяных фолликулах и клетках одного-двух глубоких слоев покровного пласта (рис. 2 б). Такие изменения эпителия вполне соответствуют состоянию подлежащей соединительной ткани (²⁶). Несколько позже, через 4—5 суток после пластики, эти изменения кожи наружной поверхности уха прогрессируют. Эксудативная фаза воспаления сменяется продуктивной: развивается мощный слой грануляционной ткани. Эпидермис остается утолщенным, в нем видны многочисленные митозы. Местами псевдоэозинофильные лейкоциты разрушают надхрящницу и далеко внедряются в хрящевую ткань, образуя в ней узоры. Даже в наиболее поздние из прослеженных сроков кожа наружной поверхности уха не становится полностью похожей на нормальную.

Кожа реципиента на внутренней стороне уха, окружающая гомотрансплантат, изменяется в еще большей степени. Подготовка ложа для лоскута приводит к образованию обширной раны, края которой оказываются смежными с пересаженным лоскутом. Вследствие скорой гибели краевых частей трансплантата образуется значительная кольцевидная рана, эпителизирующаяся за счет реципиента. Благодаря активному перемещению эпителия комплексным пластом и митотическому делению клеток базального и супрабазального слоев возникает многослойный эпидермальный регенерат. Он имеет на разрезе форму клина или булавовидно утолщен. В его формировании принимают участие, как и при других повреждениях кожи млекопитающих и человека (¹¹⁻¹³, ²⁷, ²⁸), жизнеспособные эпителиальные элементы волосяных фолликулов. Эпидермальный регенерат имеет широкую зону жизнеспособных элементов, базофильная цитоплазма которых содержит большое количество РНК. Он продвигается по успевающей образоваться грануляционной ткани реципиента (рис. 3). Значение субстрата для успешного продвижения эпителия и его состояния хорошо заметно в тех местах регенерата, где он, нарастая на омертвевшую дерму гомотрансплантата, становится очень тонким, нежизнеспособным на вид (рис. 3), и, по-видимому, весь его свободный край вскоре погибает. В то же самое время участки регенерата, лежащие на грануляционной ткани реципиента, состоят из многих слоев жизнеспособных клеток (рис. 3). В данном случае, помимо ухудшения, субстрат для эпителия еще и чужероден, что не может не иметь отрицательного значения.

В ряде случаев некротические массы, образовавшиеся из краевых частей гомотрансплантата, не дают возможности эпителиальному регенерату сколько-нибудь далеко продвигаться, и эпителий реципиента образует мощные разрастания в своей грануляционной ткани, никогда не проникающие в дерму лоскута (рис. 4).

Таким образом, консервация лоскутов кожи кролика в течение 9 дней при -3° не изменяет видимым образом ее строения. Пересаженные лоскуты в конечном счете погибают, но в течение первых 10 — 12 дней обнаруживают наряду с дистрофическими некробиотическими — регенеративные и пролиферативные изменения. Наличие последних показывает, что при создании благоприятных условий можно, по всей вероятности, если не сделать роживление гомотрансплантатов кожи постоянным, то сильно удлинить срок их выживания. Последнее имеет большое практическое значение и правдывает поиски в этом направлении.

Приносим глубокую благодарность проф. В. И. Попову за постоянную помощь при выполнении экспериментальной части работы.

Военно-медицинская академия
им. С. М. Кирова

Поступило
3 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ B. O. Rogers, Plastic and Reconstr. Surg., 7, 3 (1951). ² H. Conway, B. Stark, Surgery, 36, 3 (1954). ³ B. O. Rogers, Y. M. Converse, Plastic and Reconstr. Surg., 14, 3 (1954). ⁴ В. С. Антипенко, Вестн. хирургии, 80, 12 (1957). ⁵ В. И. Попов, В. П. Ерков, Вестн. хирургии, 81, 10 (1958). ⁶ Е. А. Зоников, Усп. совр. биол., 46, 2 (1958). ⁷ Ю. Я. Грицман, Вестн. АМН СССР, 1 (1960). ⁸ А. Н. Филатов, Ю. В. Берингер, Г. В. Головин, П. М. Медведев, Пересадки и замещения тканей и органов, Л., 1960. ⁹ В. Г. Вайнштейн, Пластика травматических дефектов кожи, М., 1946. ¹⁰ Th. Gillman, R. Pepp et al., Brit. J. Plast. Surg., 6, 3 (1953). ¹¹ Л. Б. Берлин, ДАН, 122, 2 (1958). ¹² Л. Б. Берлин, ДАН, 128, № 3 (1959). ¹³ Л. Б. Берлин, Арх. анат., гистол. и эмбриол., 37, 8 (1959). ¹⁴ Л. Б. Берлин, Вестн. хирургии, 85, 1 (1960). ¹⁵ К. Е. Зайцева, Арх. анат., гистол. и эмбриол., 39, 11 (1960). ¹⁶ W. P. Longmire, H. B. Stone et al., Plastic and Reconstr. Surg., 2, 5 (1947). ¹⁷ E. H. Ellison, B. C. Martin et al., Ann. Surg., 134, 9 (1951). ¹⁸ А. А. Браун, К. М. Акылбеков, ДАН, 95, № 6 (1954). ¹⁹ Th. Gillman, M. Horgan, Y. Pepp, Plastic and Reconstr. Surg., 18, 4 (1956). ²⁰ Л. Б. Берлин, ДАН, 134, № 5 (1960). ²¹ А. А. Werder, C. A. Hardin, Surgery, 35, 3 (1954). ²² J. B. Brown, F. McDowell, Skin grafting, Philadelphia, 1949. ²³ Ю. В. Берингер, А. А. Зыков, В кн. Проблемы пересадки органов и тканей, М., 1959. ²⁴ Г. Д. Вильявин, Там же. ²⁵ Г. А. Дудкевич, Там же. ²⁶ В. Г. Гаршин, Воспалительные разрастания эпителия, их биологическое значение и отношение к проблеме рака, М.—Л., 1939. ²⁷ Л. Б. Берлин, ДАН, 127, № 4 (1959). ²⁸ Л. Г. Судзиловская, Тр. Ленингр. сан.-гиг. инст., 16 (1953). ²⁹ Н. Н. Аничков, К. Г. Волкова, В. Г. Гаршин, Морфология заживления ран, М., 1951. ³⁰ Н. А. Шевченко, ДАН, 64, № 6 (1949).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

А. А. ВОЙТКЕВИЧ

**ГИПОТАЛАМИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯЦИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ДОЛИ
ГИПОФИЗА**

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 27 XII 1960)

Связь пигментации покровов с нервной регуляцией известна по явлениям сезонных изменений в рисунке и окраске некоторых животных. Эта зависимость детально изучена на рыбах и амфибиях, обладающих комплексом различных пигментных клеток (хроматофоров) в эпидермисе и дермальной части кожи. После открытия Цондеком (¹⁹) интермедины была уточнена зависимость пигментной реакции от промежуточной доли гипофиза. Позже было показано, что под контролем интермедины находится реакция вытягивания цитоплазматических отростков хроматофоров, содержащих пигментные гранулы (экспансия). В отсутствие интермедины у гипофизэктомированных амфибий наступает обратное явление — контракция пигментных клеток, сочетающаяся с дисперсией гранул в ксантофорах. Пигментообразование же, и в частности меланогенез у рыб, не зависит от интермедины, а контролируется адренокортикотрофным гормоном передней доли гипофиза. У амфибий имеются основания считать, что и дисперсия и пигментообразование в хроматофорах зависят от интермедины (^{6, 14}). Последний по своей химической структуре наиболее близок к АКТГ (¹²).

Имеются противоречивые данные о результатах травмирующих воздействий в области отдельных участков центральной нервной системы, главным образом гипоталамуса, сопровождающихся усилением или ослаблением реакции хроматофоров кожи (¹⁵⁻¹⁷). По новейшим данным, в гипоталамусе локализируются ядра, нейросекреторный материал которых оказывает влияние на многочисленные функции нижнего придатка мозга (^{5, 11}). Представляло интерес выяснить, не зависит ли стимулирующая хроматофорная функция промежуточной доли гипофиза от нейросекреторных веществ промежуточного мозга.

В этой связи приобретают особое значение экспериментальные факты, полученные ранее в нашей лаборатории на личинках разных видов амфибий в результате частичной децеребрации (¹). Удаление промежуточного мозга, не влияя на жизнеспособность головастика, имеет своим закономерным следствием приостановку естественного метаморфоза, резкое повышение гидрофильности тканей и гиперпигментацию (^{2, 3}). Такого рода взаимосвязанная триада физиологических нарушений является адекватным отражением функциональных сдвигов в гипофизе и, соответственно, в его трех долях. Естественно, что феномен торможения метаморфоза ассоциировался с передней (дистальной) долей, гидрофильность тканей — с нервной долей. Промежуточная же доля в аналогичном аспекте не являлась еще объектом исследования (^{1, 4}).

Нашим подопытным материалом являлись головастики и частичные сеголетки зеленой лягушки (*Rana esculenta*), чесночницы (*Pelobates fuscus*), жерлянки (*Bombina bombina*) и зеленой жабы (*Bufo viridis*) в количестве 836 экземпляров; 140 неоперированных головастика тех же стадий, а также 18 сеголеток служили контрольными. Методика операций и условия со-

держания подопытного материала были обстоятельно описаны в предыдущих публикациях (²⁻⁴).

Во всех случаях, когда операции были успешными, т. е. было произведено удаление преоптических ядер, локализующихся латерально в стенках преоптической ямки (что подтвердилось позже гистологическим исследованием), изменения в окраске покрова проявлялись очень рано и резко усиливались через 4—6 час. после удаления промежуточного мозга (рис. 1 а, б). Такая гипермеланизация была наиболее интенсивной у головастика и сеголеток чесночницы и зеленой лягушки, она относительно слабее проявлялась у жерлянки и зеленой жабы. При неполной экстирпации преоптической области наступало слабое потемнение кожи оперированного животного, по своей окраске оно занимало промежуточное положение между гиперпигментированными животными и контролем (рис. 1 в). На рис. 1 г, д представлены микрофото кожи, показывающие резкую экспансию хроматофоров, наступающую после выключения преоптических ядер. Одновременно происходит превращение меланоцитов в меланофоры и миграция их в зоны, относительно слабо окрашенные в норме. Реакция пигментных клеток у оперированных головастика и молодых лягушек стойко сохраняется очень продолжительное время. Так, остановившиеся в развитии головастики чесночницы и через 20 дней после операции оставались совершенно черными. Молодые лягушки, резко черневшие в течение первых суток после операции, через 7—8 дней обнаружили лишь слабое посветление, сохранив на продолжительный срок гиперпигментацию покрова и тем самым значительно отличаясь от своего исходного состояния.

Гистологическое изучение области промежуточного мозга, воронки и гипофиза преимущественно на сагиттальных и частично на поперечных срезах дало вполне согласующиеся и многократно подтвердившиеся результаты. Предварительно следует указать, что у контрольных головастика, как раз на стадии, предшествующей наступлению метаморфоза (на этой стадии было произведено большинство операций), промежуточная доля выделялась среди других отделов гипофиза своими признаками относительно ранней дифференцировки. В этом можно было убедиться по состоянию клеток, характеру и интенсивности окрашивания их цитоплазмы. В частности, наиболее сильную ПАС-реакцию давали именно клетки промежуточной доли, несколько слабее окрашивалась морфологически слабо оформленная задняя доля гипофиза. Депонированный здесь нейросекреторный материал, а также его мелкие гранулы и пылевидная зернистость в предшествующем участке нейральной части гипофизарного стебля характеризовались присутствием полисахаридного компонента. Экспериментальное выключение источника нейросекрета (преоптических ядер) приводило в сравнительно короткий срок к редукции задней доли гипофиза, а затем и нейрального участка стебля, контактирующего у личинок в норме на значительном протяжении с передней долей гипофиза.

В результате от нейрогипофиза остается лишь один слой уплотненных глиальных клеток, покрывающий переднюю и промежуточную доли. Обе эти сохранившиеся доли претерпевают гипертрофию в сочетании с усиленной васкуляризацией. Здесь важно отметить эти явления в отношении промежуточной доли, питание которой в норме обеспечивается в значительной мере сосудами, локализующимися в пограничной области между задней и промежуточной долями. Одновременно в клетках последней наблюдается обеднение полисахаридами (рис. 1 е, ж). Для цитологического состава этой доли характерным является увеличение размеров клеток (амфифилов), обладающих оксифильными ядрами и крупными ядрышками. Набухшая цитоплазма усиливает свои базофильные свойства и становится мутной. Совокупность всех этих многократно подтверждавшихся на нашем материале сдвигов в микроструктуре следует рассматривать в качестве доказательства того, что меланофоры стимулирующая функция промежуточной доли

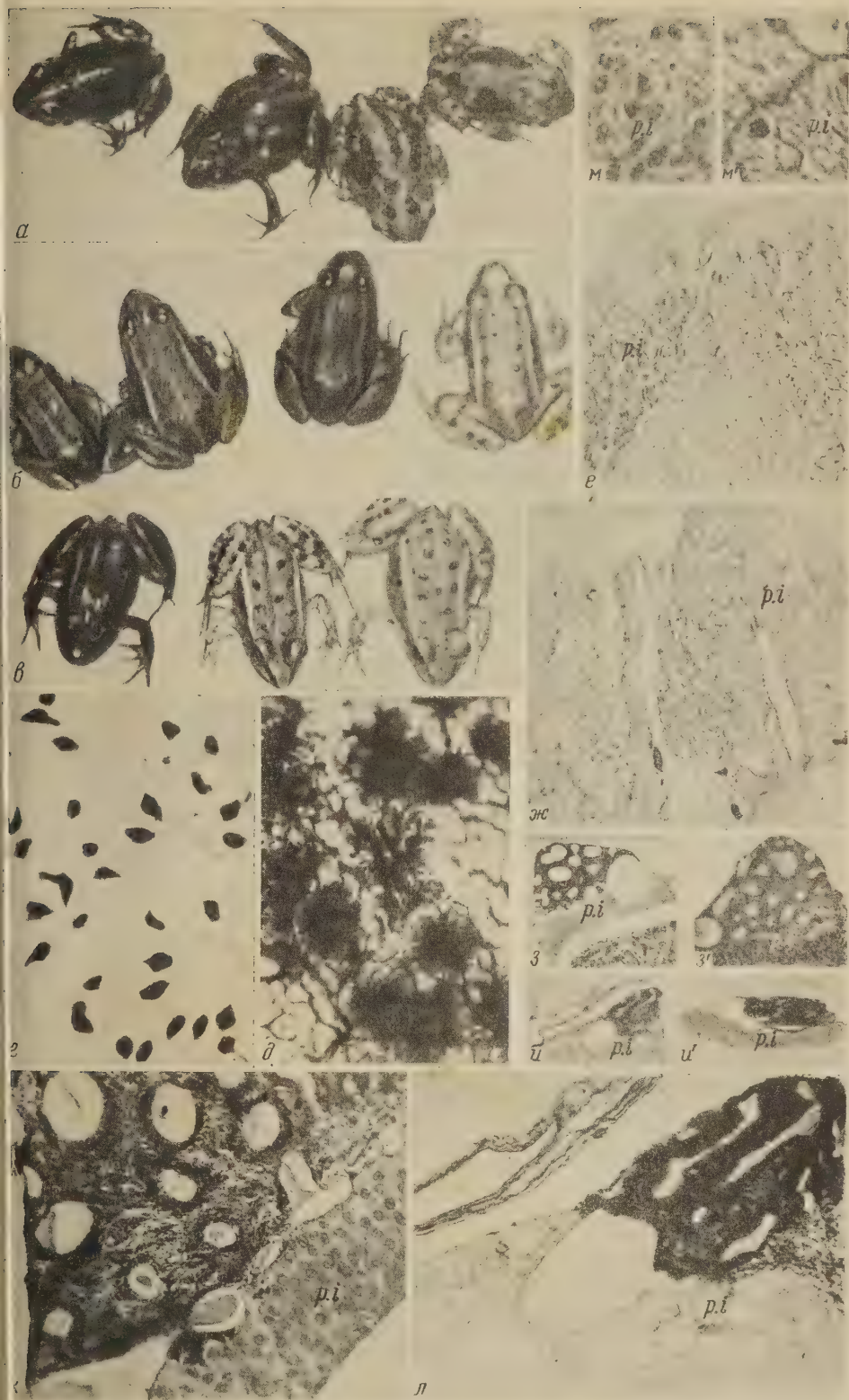
гипофиза находится под контролем нейросекрета, образующегося в преоптических ядрах и депонируемого обычно в задней доле гипофиза.

Дополнительное подтверждение такого заключения мы видим в результатах экспериментов, в которых экстирпация преоптической области гипоталамуса сопровождалась заместительной гомо- или гетеротрансплантацией одноименных участков головного мозга, бравшихся от личинок разных стадий развития или лягушек. В этих случаях признаки усиления пигментации, если и проявлялись после операции, были сильно ослабленными и наблюдались в течение короткого времени. Самое главное, что при этом не отмечалось рассмотренных выше изменений в состоянии промежуточной доли гипофиза. Такие опыты, кроме того, показали, что влияние нейросекрета не обязательно осуществляется по аксонам нейросекреторных клеток (преоптико-гипофизарный путь), оно возможно и гуморальным путем.

Приведенные выше экспериментальные данные мы дополнили наблюдениями над сезонными изменениями в окраске покрова и микроструктуре промежуточной доли взрослых особей. Объектом наблюдений являлись лягушки *Rana esculenta*, обладающие способностью изменять окраску кожи в разные сезоны в относительно большей степени, чем это свойственно другим нашим видам бесхвостых амфибий. В период размножения самцы этого вида приобретают очень светлую желтовато-салатную окраску. До этого и позже их покров имеет более темные тона — интенсивно зеленая окраска дорсальной поверхности с редкими темно-коричневыми пятнами на спинке и полосами на задних конечностях. Сопоставляя гистологическую структуру долей гипофиза таких лягушек в разные сезоны, мы получили дополнительные подтверждения тесной функциональной зависимости между задней и промежуточной долями. В период, предшествующий размножению, и в начале его задняя доля чрезвычайно гипертрофируется в связи с резким усилением ее васкуляризации и гиперемией. Этому сопутствует отчетливое уменьшение, сдавливание и некоторая деформация промежуточной доли (рис. 1 з, и). Физиологические связи между обеими долями в это время не прекращаются, о чем можно судить по наличию гиперемизированных сосудов в пограничной зоне и выделению мелких капель жидкого субстрата в межклеточные пространства промежуточной доли. После периода размножения соотношение между теми же долями изменяется на обратное (рис. 1 к, л), кожный покров в это время приобретает несколько более темную окраску.

Тесный морфо-функциональный контакт между задней и промежуточной долями подтверждается проникновением части нервных волокон из задней доли в промежуточную⁽¹⁰⁾ в сопровождении мелких секреторных гранул⁽⁸⁾. Контакт между задней и промежуточной долями не исчерпывается непосредственными нейро-васкулярными связями. Очень часто, именно в период размножения, можно наблюдать присутствие в промежуточной доле мелкокапельной субстанции ближе к задней доле, особенно в местах расположения пограничных сосудов. Таких капель всегда больше в тех частях промежуточной доли, которые контактируют с задней долей или небольшим участком гипофизарного стебля (рис. 1 м). Капли, образующиеся в промежуточной доле, по своим

Рис. 1. Сеголетки: а — четыре молодых чесночницы, у двух слева удален промежуточный мозг (3 дня назад), две направо — контрольные; б — зеленые лягушки, три слева через 5 дней после удаления промежуточного мозга, справа — одна контрольная; в — левая сеголетка — после полного удаления промежуточного мозга, средняя — частичное удаление, правая — интактный контроль; г, д — тотальный препарат кожи области спины от головастика чесночницы: г — контроль, д — через два дня после удаления промежуточного мозга, 240 ×; е, ж, — ПАС-реакция промежуточной доли гипофиза головастика чесночницы перед началом метаморфоза: е — контроль, ж — через 12 дней после удаления промежуточного мозга, 420 ×; з, и — задняя и промежуточная доли гипофиза взрослой зеленой лягушки, 72 ×; а, а' — в период размножения, и, и' — через месяц после размножения; к — период размножения; л — после размножения, 240 ×, окраска по Хэлми; м, м' — оксифильные капли в промежуточной доле вблизи от границы с задней долей гипофиза, окраска гематоксилином по Гомори с флоксином по Хэлми, 420 ×, р, i — промежуточная доля гипофиза



тинкториальным свойствам не тождественны нейросекрету, депонируемому в задней доле. Так, при окраске гематоксилином Гомори с флоксином эти капли промежуточной доли интенсивно окрашиваются флоксином в ярко-малиновый цвет, тогда как гранулы нейросекрета в задней доле имеют черноватую или темно-фиолетовую окраску. Оксифильные свойства капелек в промежуточной доле выявляются (оранж Ж) при использовании комбинированных окрасок по Маллори или Хэлми. При этом лучше выявляются промежуточной доли клетки с яркими оксифильными ядрами. После же обработки на полисахариды гранулы нейросекрета в задней доле дают интенсивную ПАС-положительную реакцию, в промежуточной же доле лишь небольшая часть капелек обнаруживает аналогичную реакцию. Альбид-фуксин выявил в периваскулярных участках пограничных сосудов наличие окрашенных гранул частично механически вытесненных в ближайшие межклеточные щели промежуточной доли. А. Давсон⁽⁸⁾ подчеркивает, что в промежуточной доле гипофиза у трех видов амфибий им не было обнаружено присутствие Гомори-положительной субстанции. Отмеченная разница в тинкториальных свойствах капелек и гранул в двух долях гипофиза указывает не на простое проникновение нейросекрета из задней доли промежуточную, а на видоизменение его химических и физиологических свойств.

Сопоставляя морфологические соотношения основных долей аденогипофиза с частями нейрогипофиза в период личиночного развития, а также у взрослых особей в разные биологические периоды, мы убеждаемся в том, что задняя доля наряду с ее специфическим значением в регуляции водного и минерального обмена имеет непосредственное отношение к физиологии промежуточной доли гипофиза. Наши данные не имеют целью опровергнуть старые и более новые наблюдения о влиянии на хроматофоров гормонального начала задней доли — пирессина^(9, 13) или известные данные о роли полового гормона в развитии брачной окраски покрова у некоторых рыб и амфибий⁽¹⁷⁾. Наши наблюдения проведены на сеголетках и половастиках, не имеющих еще в организме полового гормона. Они оригинальны в том отношении, что специфическая реакция хроматофоров на интермедин осуществлялась в отсутствие гормонального начала задней доли, поскольку она была полностью редуцирована в результате экспериментального устранения источника депонируемого в ней нейросекрета. Нецелесообразно схематизировать отношения между задней и промежуточной долями в качестве антагонистических и ограничивать значение последней доли только образованием гормона, регулирующего функцию хроматофоров. Более того, не следует исключать участие интермедины в некоторых физиологических реакциях, контролируемых гипоталамусом или гормональными веществами задней доли гипофиза^(9, 18).

Воронежский
медицинский институт

Поступило
26 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Войткевич, Пробл. эндокринол. и гормонотер., 5, № 3, 26 (1959).
- ² А. А. Войткевич, А. В. Неговская, ДАН, 90, № 4, 689 (1953).
- ³ Т. М. Иванова, Журн. общ. биол., 9, № 3, 245 (1948).
- ⁴ Т. М. Иванова, Журн. общ. биол., 13, № 3, 182 (1952).
- ⁵ А. Л. Поленов, Арх. анат., гистол. и эмбриол., 35, № 6, 114 (1958).
- ⁶ W. Chavin, Anat. Rec., 125, № 2, 603 (1956).
- ⁷ W. Chavin, Pigment Cell Biology, N. Y., 1953, p. 63.
- ⁸ A. B. Dawson, Anat. Rec., 115, № 1, 63 (1953).
- ⁹ M. Gordon, Pigment Cell Growth, N. Y., 1953.
- ¹⁰ J. D. Green, Am. J. Anat., 88, № 2, 225 (1951).
- ¹¹ G. W. Harris, Physiol. Rev., 34, № 4, 138 (1948).
- ¹² J. I. Harris, P. Roos, Biochem., 71, № 3, 445 (1959).
- ¹³ H. M. Lundstrom, P. Bard, Biol. Bull. Wood's Hole, 62, 1 (1932).
- ¹⁴ G. E. Pickard, Endocrinol., 55, № 2, 274 (1951).
- ¹⁵ A. Shürmeyer, Klin. Wochenschr., 5, 2311 (1926).
- ¹⁶ H. Selye, Text Book Endocrinology, Montreal, 1947.
- ¹⁷ H. B. Van Dyke, The Physiology and Pharmacology of the Pituitary Body, Chicago, 1a, 2, 1936, 1939.
- ¹⁸ B. Zondek, Hormone des Ovariums und des Hypophysenhinterlappens, Wien, 1935.
- ¹⁹ B. Zondek, H. Krohn, Klin. Wochenschr., 11, 10, 45 (1932).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

Л. В. ПОЛЕЖАЕВ, Л. В. АХАБАДЗЕ, Н. А. ЗАХАРОВА и М. П. ЯВИЧ

РЕГЕНЕРАЦИЯ МЫШЦЫ СЕРДЦА ПОД ВЛИЯНИЕМ
ПИРОГЕНАЛА И ГИДРОЛИЗАТА МИОКАРДА

(Представлено академиком А. Н. Бакулевым 15 XII 1960)

При повреждении миокарда крысы путем электродиатермокоагуляции в коническом инфарктоподобном очаге повреждения внутри соединительной ткани происходит регенеративное новообразование небольших островков мышц, отделенных от культей мышц краевой зоны плотным и толстым рубцом; при повреждении миокарда и обработке животных гидролизатом мышц сердца весь очаг заполняется новообразованными мышцами⁽²⁾. Несколько более слабый результат получается также при применении в качестве стимуляторов регенерации экстрактов из сердечной и скелетной мышцы, витамина В₁₂ и тиреоидина⁽³⁾. Испытывая давление плотного рубца, новообразованные мышцы не могут нормально дифференцироваться и через 1½ — 2 мес. после операции распадаются, а очаг повреждения заполняется рубцовой тканью. В некоторых опытах⁽³⁾ нам удалось добиться дифференцировки и стойкого сохранения регенерировавших мышечных волокон, прорастающих рубец от культей мышц. Однако во всех случаях развитие плотного рубца по краям очага повреждения препятствовало регенерации культей мышц краевой зоны. Недавно в опытах на собаках была показана возможность стойкой регенерации мышцы сердца⁽⁴⁾.

В связи с полученными данными возникла задача затормозить развитие рубца и стимулировать регенерацию мышцы сердца. Гиалуронидаза может затормозить рубцевание только при ее непосредственном введении в очаг повреждения. Однако применение гиалуронидазы привело к торможению регенерации скелетных мышц у мышей и морских свинок⁽⁶⁾. Мы исследовали в качестве тормозителей рубцевания трипсин и пирогенал, аналог которого — пиромен — так изменяет развитие рубца, что сквозь него прорастают регенерирующие нервные волокна спинного мозга у млекопитающих⁽⁷⁾. Сходное получено в опытах с трипсином⁽⁸⁾. Здесь будут описаны опыты только с пирогеналом, пирогеналом — гидролизатом и пирогеналом — гидролизатом — трипсином.

Опыты были поставлены на 52 старых белых крысах, самцах, весом 300—400 г. Операцию на сердце проводили по нашей прежней методике при помощи аппарата для искусственного дыхания и электродиатермокоагуляции в условиях асептики. Гидролизат приготавливали по прежней методике⁽²⁾. Вводили гидролизат подкожно в разовой дозе 4,3 γ в 1,0 мл 0,85% физиологического раствора в день операции и еще 6 раз через день. Пирогенал вводили также подкожно в дозе 6 γ в 1,0 мл физиологического раствора в день операции и ежедневно в течение 14 дней; делали перерыв в 30 дней снова вводили в течение 14 дней; делали перерыв в 17 дней, вводили 8 раз делали перерыв в 4 дня и вводили еще 8 раз. При одновременном применении гидролизата и пирогенала эти препараты вводили так же, как в опытах с их отдельным применением. Трипсин вводили внутрибрюшинно в 0,5 мл фосфатного буфера рН 7,4 в разовой дозе 4 мг. В серии опыта гидролизат — пирогенал — трипсин в первые 14 дней применяли гидролизат и пирогенал, как обычно; делали перерыв в 3 дня, затем ежедневно в течение 10 дней вводили трипсин; делали перерыв в 3 дня и затем ежедневно в течение 9 дней вводили пирогенал. Крыс забивали и сердца фиксировали

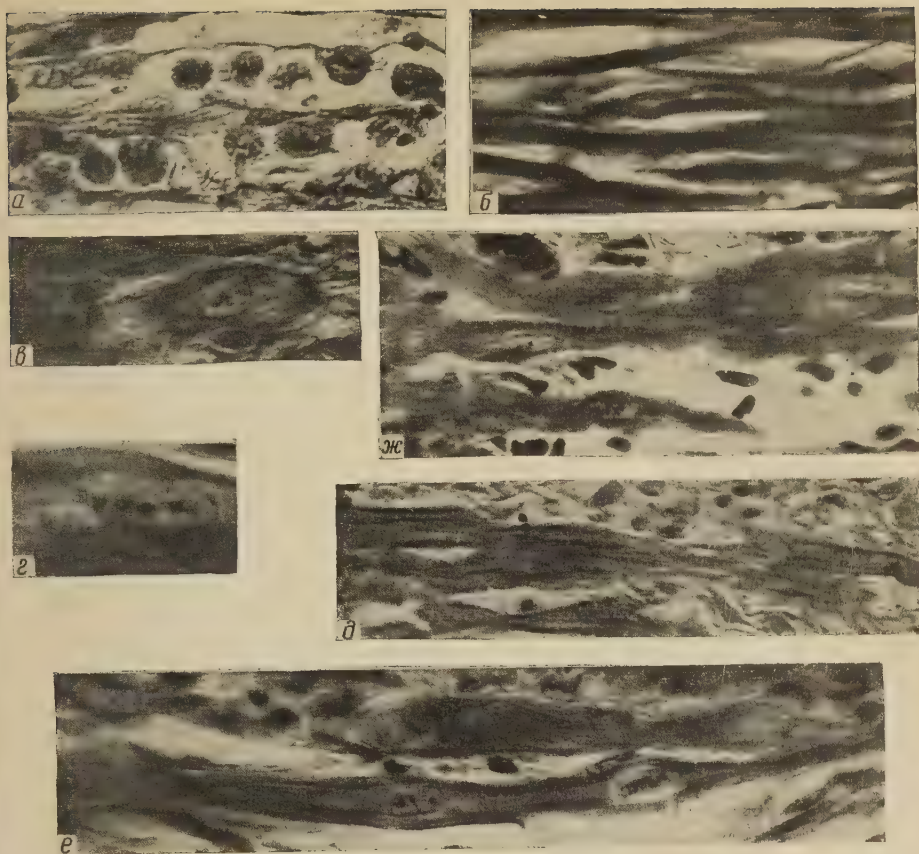


Рис. 1

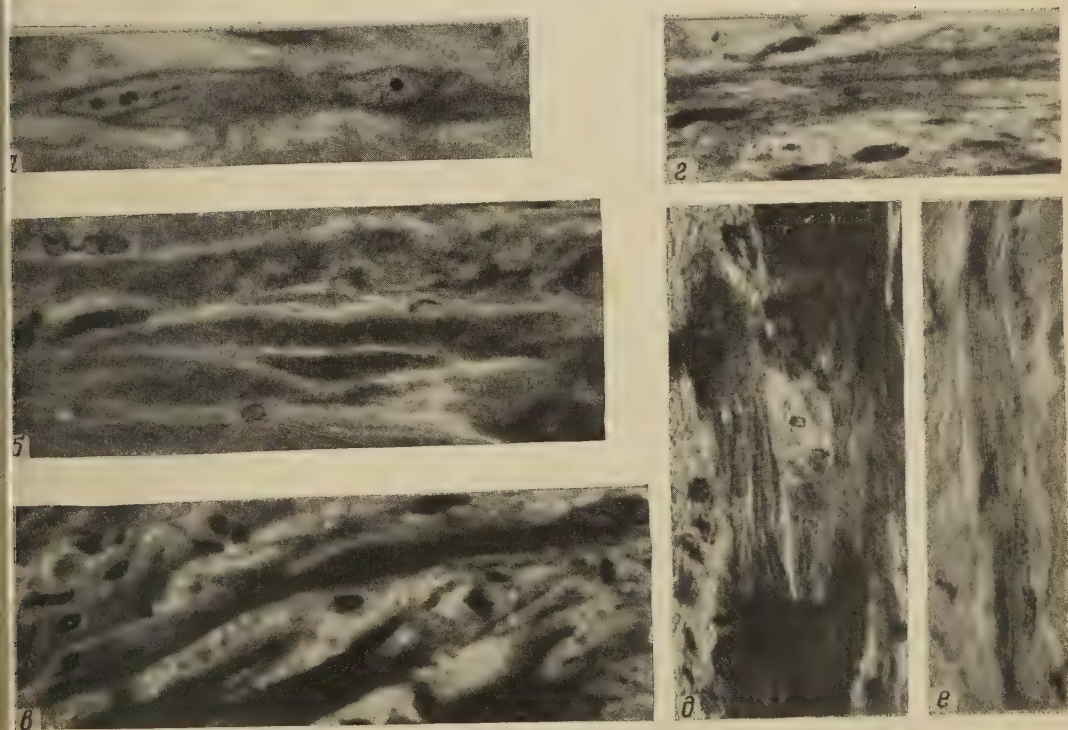


Рис. 2



через 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 17, 21, 25, 30, 45, 60, 90, 120 и 158 дней после операции. Фиксацию производили в жидкости Гелли с уксусной кислотой, сериальные срезы окрашивали гематоксилин-эозином, железным гематоксилином, по ван Гизону, по Маллори, азаном по Гейденгайну.

Опыт с пирогеналом. В первые дни после операции коагулированные мышцы в очаге повреждения отечны, раздвинуты экссудатом и сильно инфильтрированы эритроцитами, которые переполняют сильно расширенные кровеносные сосуды, большие лакуны и межтканевые щели. Наиболее характерным является резкое изменение фазы воспаления, в которой почти полностью исключается инфильтрация очага повреждения полинуклеарами и лимфоцитами, в то время как в контроле, при простом повреждении миокарда, очаг очень сильно инфильтрируется лейкоцитами. Вероятно, в связи с этим сильно изменяются и дальнейшие этапы регенерации. У имеющих полинуклеаров гиперсегментируются ядра. Ткани очага повреждения инфильтрируются полибластами и макрофагами; в краевой зоне мигрируют фибробласты и ядра, освобождающиеся из культей мышц. В коагулированных мышечных волокнах исчезают ядра, поперечная исчерченность и миофибриллы, волокна восковидно изменяются и распадаются на фрагменты и глыбки. Лизис некротизированных мышц идет быстрее всего в краевой зоне, где образуется вначале узкий, а затем широкий гистиоцитарный пояс, а также в зонах инфильтрации эритроцитами. В основном лизис идет путем фагоцитоза коагулированных мышечных волокон инвазировавшими их полибластами, превращающимися в макрофаги. Макрофаги иногда сплошь заполняют сарколеммные трубочки запустевших мышечных волокон (рис. 1 а). По сравнению с контролем лизис задержан — не заканчивается через 13 дней после операции. Некоторые из полибластов, находясь по соседству с разрушающимися мышечными волокнами, по-видимому, под влиянием освобождающихся из них продуктов распада, превращаются в миобласты и цепочки миобластов. Начиная с 17—21 дня после операции из этих миобластов образуются отдельные, не имеющие поперечной исчерченности мышечные волокна или небольшие группы их. Сдавленные коллагеновыми волокнами рубцовой ткани, они далее распадаются.

Очень своеобразно идет процесс рубцевания в очаге повреждения. Коллагеновые волокна образуются рано, начиная с 5 дня после операции, на 10 день они уже сильно развиты. Преждевременно созревая, они достигают большой толщины. В контроле или опыте с гидролизатом на поздних стадиях рубец состоит из рыхлой ячеистой соединительной ткани с большим количеством фибробластов и сильно сжимает культы мышц краевой зоны. В опыте с пирогеналом рубец плотный и состоит из параллельных рядов толстых коллагеновых волокон, среди которых находится мало фибробластов (рис. 1 б), и не очень сильно стягивает культы мышц краевой зоны.

В краевой зоне культы мышц начинают дедифференцироваться на 5—7 день после операции: концы их колбовидно расширяются, светлеют, поперечная исчерченность и миофибриллы исчезают, ядро становится крупным, светлым, с большим ядрышком (рис. 1 в). Многие ядра выходят наружу из саркоплазмы культей мышц и смешиваются с клетками соединительной ткани. Ядра мышц делятся амитотически, путем поперечной или косой перешнуровки (рис. 1 г). Митозы в них отсутствуют. Уже на 10—13 день после операции от культей мышц вырастают длинные тонкие отростки, светлые, не имеющие поперечной исчерченности и миофибрилл (рис. 1 д); они содержат эмбрионального типа ядра, которые амитотически делятся (рис. 1 е). Регенерирующие мышечные волокна вырастают в пространстве или каналы между толстыми коллагеновыми волокнами рубца, на 30 день после операции в них образуется поперечная исчерченность (рис. 1 ж). На 45, 60, 90 и 120 дни после операции они от края до края прорастают рубец в очаге повреждения, образуя мост. Размер очага уменьшается, но все же в основном очаг остается заполненным соединительной тканью, а не регенерировавшими мышцами. Последние часто бывают при-

чудливо извиты, повторяя волнистую форму сдавливающих их коллагеновых волокон. Регенерировавшие мышечные волокна хорошо дифференцированы: имеют миофибриллы, поперечную исчерченность, ядра, вставочные пластинки даже через 120 дней после операции.

Опыт с пирогедалом и гидролизатом. В первые дни после операции очаг повреждения очень сильно инфильтрирован эритроцитами, но в нем присутствуют также полинуклеары и лимфоциты, которых значительно меньше, чем в контроле, но гораздо больше, чем в опыте с пирогедалом. Инфильтрация очага полибластами значительна. Лизис коагулированных тканей заканчивается через 10, в контроле через 13, а в опыте с одним гидролизатом через 5 дней после операции. Лизис идет в основном по ферментному типу, а не путем фагоцитоза. Коагулированные мышечные волокна быстро разрушаются и одновременно с этим масса инфильтрировавших их полибластов превращается в миобласты и цепочки миобластов (рис. 2 а). Миобласты быстро образуют мышечные волокна, и уже через 10 дней после операции весь очаг повреждения заполняется массивом новообразованных мышц. Для них характерно: 1) то, что они образуются независимо от культей мышц краевой зоны и отделены от них прослойкой рубцовой ткани; 2) то, что они лишены поперечной исчерченности или последняя развита очень слабо (рис. 2 б). Одновременно с этим процессом и независимо от него происходит регенерация мышечных волокон от культей мышц краевой зоны. Как и в опыте с пирогедалом, культы мышц дедифференцируются, затем образуют отростки (рис. 2 в), которые далее растут и дифференцируются в поперечнополосатые мышечные волокна. Таким образом, весь очаг повреждения заполняется массивом мышц — новообразованных и регенерировавших от культей. Однако эти возникшие разными путями мышцы соединиться не могут, так как их разделяет плотный рубец, окаймляющий краевую зону. Гидролизат способствует не только усилению лейкоцитарной инфильтрации, но и уплотнению рубца и его сжатию на краях очага повреждения. Поэтому регенерирующие от культей мышечные волокна, иногда далеко врастая между массивами связок новообразованных мышц, дифференцируются (рис. 2 г), но все же соединиться с последними не могут. Новообразованные мышцы в центре очага повреждения начинают распадаться уже с 21 дня после операции, но пирогедал задерживает распад, и он не заканчивается даже через 90 и 120 дней, а в опыте с одним гидролизатом он кончается через 60 дней после операции. Однако через 158 дней после операции мы наблюдали, что сквозь рубец очага повреждения, образуя мост, прорастают хорошо дифференцированные регенерирующие мышечные волокна (рис. 2 д). Иногда в центре очага лежат изолированные мышечные волокна (рис. 2 е).

Опыт с пирогедалом, трипсином и гидролизатом. В этом случае процесс происходит так, как это было в опыте с пирогедалом и гидролизатом. Остатки новообразованных мышц в центре очага повреждения имеются еще через 120 дней после операции, а регенерирующие от культей мышц мышечные волокна прорастают рубцовую ткань от краев очага повреждения. Рубец сверху ячеистый, внизу — плотный.

По сравнению с нормой (рис. 3 а) в период применения пирогедала, одного (рис. 3 б) или вместе с гидролизатом, зубец *R* электрокардиограммы (ЭКГ) снижается в среднем на 34%. После прекращения обработки пирогедалом зубец *R* в опыте с пирогедалом остается сниженным; в опыте с пирогедалом и гидролизатом он через 2 мес. достигает исходного уровня (рис. 3 в); а в опыте с пирогедалом, гидролизатом и трипсином он увеличивается выше нормы (рис. 3 г). Зубец *T* в опыте с пирогедалом не имеет ярко выраженной негативности, как это наблюдается в контроле, но имеет двухфазность (\mp) с переходом в уплощенный; в опыте с пирогедалом и гидролизатом он не был негативным и почти никогда не был двухфазным, но был хорошо выражен. Нормализация ЭКГ во всех опытах начиналась

поздно — с 30—45 дня и продолжалась до 90—120 дней после операции; в опыте с пирогеналом она была в 40%, в опыте с пирогеналом и гидролизатом — в 60% и в опыте с пирогеналом, гидролизатом и трипсином — в 50% случаев. Период нормализации ЭКГ совпадает с периодом новообразования и наличия мышц в центре очага повреждения.

Опыт с пирогеналом и гидролизатом отчетливо демонстрирует наличие двух типов регенерации: 1) путем новообразования мышц в центре очага повреждения, независимо от культей старых мышц; 2) путем отрастания мышечных волокон от старых культей. Новообразование мышц мы рас-

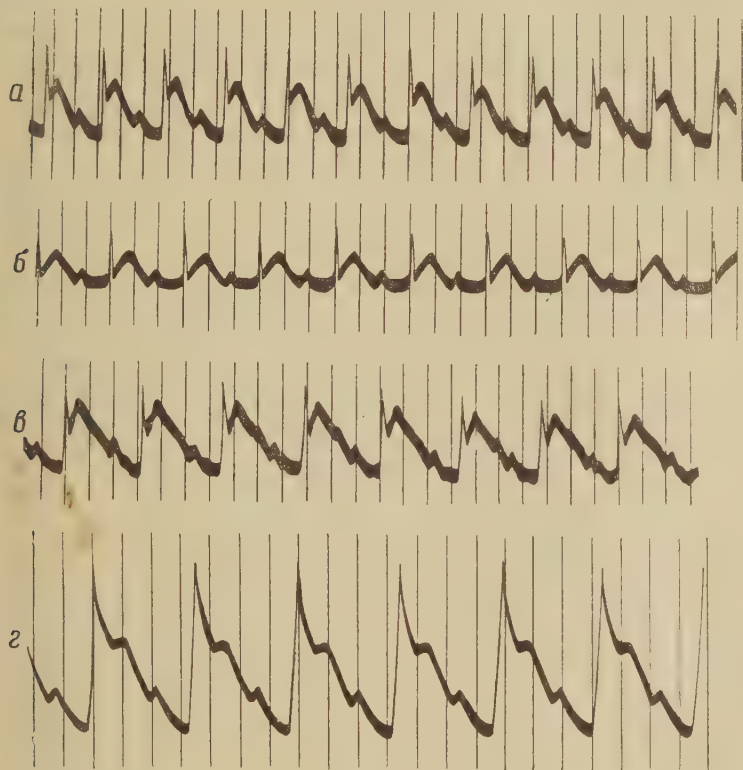


Рис. 3

матриваем как явление индукции — как превращение полибластов под влиянием продуктов распада коагулированных мышц в миобласты, а последних в мышечные волокна, подобно тому, что наблюдалось в опытах Левандера (¹). Объем индукции прямо пропорционален скорости лизиса коагулированных мышц, гесп. выделения продуктов распада и действия их на полибласты. Гидролизат значительно стимулирует, а пирогенал задерживает эти процессы. Регенерация мышечных волокон путем их отрастания от старых культей стимулируется пирогеналом и гидролизатом, но последний, способствуя уплотнению и сжатию рубца, препятствует отрастанию сквозь рубец регенерирующих мышечных волокон. Пирогенал же стимулирует их регенерацию и изменяет характер рубцевания.

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова

Академии наук СССР

Поступило

9 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. Levander, Arkiv zool., 8, 565 (1956).
- ² Л. В. Полежаев, Л. В. Ахабадзе, Н. А. Захарова, В. Л. Мантеева, Изв. АН СССР, сер. биол., № 1, 16 (1959).
- ³ Л. В. Полежаев, Л. В. Ахабадзе, Н. А. Захарова, В сборн. Пластические и восстановительные процессы, М., 1959, стр. 189.
- ⁴ Н. П. Сеницын, Грудн. хирургия, № 4 (1959).
- ⁵ C. C. Turbes, L. W. Greetman, Anat. Rec., 117, 228 (1953).
- ⁶ Л. П. Тюрликова, Уч. зап. 1 Лен. мед. инст., 3, 138 (1959).
- ⁷ W. W. indle, Regeneration in the Central Nervous System, 1955.

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОРФОЛОГИЯ

Е. В. ЧУЛИЦКАЯ

**ЛАТЕНТНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВКА МАТЕРИАЛА
СЛУХОВОГО ПУЗЫРЬКА У ОСЕТРА И СЕВРЮГИ**

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 30 XII 1960)

В настоящей работе изучалась латентная дифференцировка материала слуховых пузырьков у осетра и севрюги в связи с вопросом о клеточных поколениях, как об одном из факторов дифференцировки (1, 2).

На некоторых представителях *Acipenser* и *Urodela* было показано, что видовым различиям в сроках латентной дифференцировки зачатков различных органов (3-6) соответствуют реальные различия в возрасте составляющих их клеток, измеряемом числом клеточных поколений. Эти последние различия обусловлены тем, что гастрюляция у них начинается на более ранних или более поздних стадиях дробления (1). Исходя из этого, можно было ожидать, что, если обнаруженная зависимость имеет общий характер, то у родственных видов, у которых гастрюляция начинается на одинаковых стадиях дробления, сроки латентной дифференцировки зачатков должны быть одинаковыми. Подходящим объектом для такого исследования являются зародыши осетра и севрюги, поскольку у них гастрюляция начинается практически при одинаковом числе клеток (2, 7).

На последовательных стадиях развития зародышей осетра и севрюги, начиная со стадии щелевидного бластопора (стадия 18 *) и до стадии 24, когда образуется слуховая плакода, изучалась способность материала слухового пузырька к развитию в условиях эксплантации его в солевом растворе Гольфретеера. Для определения локализации материала слухового пузырька на этих стадиях предварительно была проведена маркировка изучаемой области.

Для эксплантации вырезали эпителий области слухового пузырька без подстилающей его мезодермы; в одних случаях брали небольшой участок, содержащий главным образом материал слухового пузырька, в других — также прилегающий к нему с вентральной стороны участок эпителия (см. рис. 1); затем разрезали лоскут эпителия пополам и складывали оба кусочка внутренними поверхностями друг к другу. Поскольку в обоих случаях результаты сходны, полученные данные в дальнейшем рассматриваются совместно.

Для выяснения вопроса об источниках индукционного воздействия в развитии слухового пузырька у осетровых рыб были поставлены дополнительные опыты: на стадии широкой нервной пластинки (стадия 20), когда материал будущего слухового пузырька в условиях изоляции еще не способен образовать слуховой пузырек, его экспантировали в одной серии опытов вместе с подстилающей его мезодермой, в другой — без мезодермального слоя, но с прилегающим к нему участком нервной пластинки, содержащим материал зачатка продолговатого мозга. Чтобы проверить, правильно ли был взят для эксплантации материал слухового пузырька, в каждом опыте сохраняли доноров и выращивали их параллельно с экспантатами.

* Номера стадий указаны по таблице нормального развития для севрюги (8).

Операции производили ножичком и волосяной петлей в растворе Гольфрейтера (в модификации Дьюкар ⁽⁹⁾), с антисептиком — сульфазиним и антибиотиками пенициллином и стрептомицином. В каждой чашке культивировали по 7—10 эксплантатов, так как при выращивании по одному процент выживаемости был значительно ниже. В зависимости от температуры эксплантаты культивировали от 6 до 10 дней; за это время контрольные за-

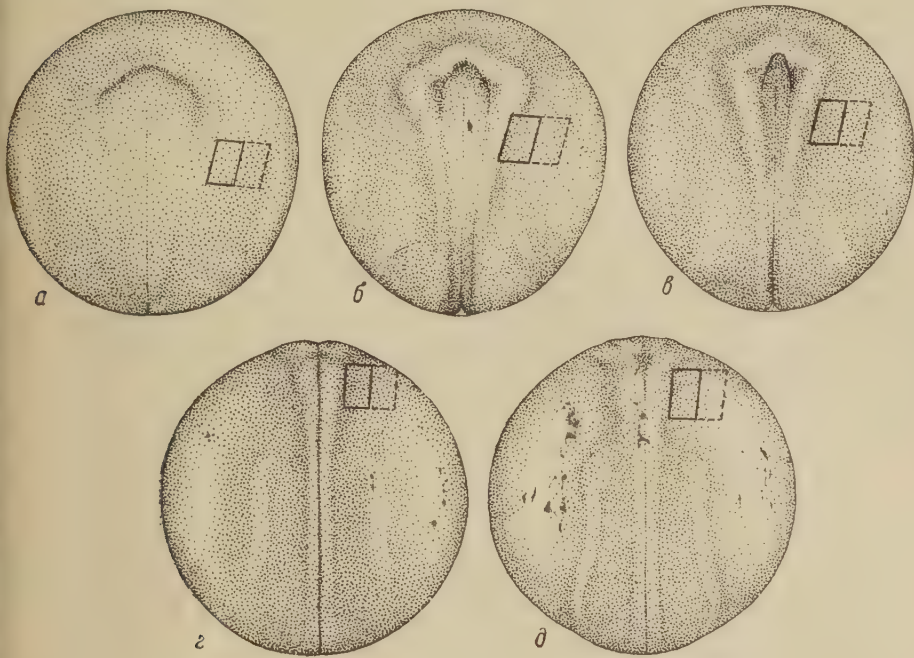


Рис. 1. Положение материала слухового пузырька на последовательных стадиях нейруляции: а — стадия 19, б — стадия 21, в — стадия 22, г — стадия 23, д — стадия 24

оодыши вылуплялись и личинки достигали возраста 2—4 суток. Материал фиксировали жидкостью Буэна. Готовили серии срезов, толщиной в 6 м. Срезы окрашивали по азановому методу Гейденгайна. Всего на разрезах изучено 733 эксплантата. Результаты опытов эксплантации материала слухового пузырька с последовательных стадий развития (18—24) сведены в табл. 1.

Таблица 1

Стадии операций	Осетр						Севрюга					
	изуч. экс-плантатов	образовалось слуховых пузырьков		D_0	$\frac{D_0}{D_K}$		изуч. экс-плантатов	образовалось слуховых пузырьков		D_0	$\frac{D_0}{D_K}$	
		всего	в т. ч. с чувств. пятн.					всего	в т. ч. с чувств. пятн.			
18	49	0	—	—	—		39	0	—	—	—	
19	56	0	—	—	—		51	0	—	—	—	
20	34	0	—	—	—		37	0	—	—	—	
21	40	0	—	—	—		34	0	—	—	—	
22	62	14 (22)	1 (7)	0,213	0,66		58	15 (26)	1 (8)	0,172	0,65	
23	45	21 (47)	10 (47)	0,238	0,73		29	13 (45)	6 (46)	0,188	0,71	
24	36	22 (61)	14 (64)	0,243	0,75		24	15 (62)	9 (60)	0,202	0,77	

Примечания: I. D_0 —среднее значение большого диаметра образовавшихся слуховых пузырьков; D_K —то же у контрольных зародышей (в микронах). II. Здесь и в табл. 2 в скобках — соответствующие данные в процентах.

Из таблицы видно, что в материале, взятом со стадии ранней и средней нейрулы, слуховые пузырьки в эксплантатах ни у зародышей осетра, ни у севрюги не возникают. Они начинают образовываться только в эксплантатах, взятых со стадии поздней нейрулы (стадия 22). На последующих стадиях процент образования слуховых пузырьков у обоих видов неуклонно возрастает. Одновременно с увеличением количества случаев образования слуховых пузырьков непрерывно увеличивается их размер. Однако даже со стадии, когда имеется уже плакода, в условиях эксплантации слуховые пузырьки возникают не в 100% случаев и размер образовавшихся пузырьков не достигает размера таковых у неоперированных одновозрастных зародышей в контроле.

В материале, взятом со стадии 22, только единичные слуховые пузырьки имеют чувствующие пятна. В слуховых пузырьках, образовавшихся в эксплантатах, взятых с более поздних стадий, процент чувствующих пятен возрастает. Разделение лабиринта на отделы у осетровых рыб, как и у амфибий в свободноплавающих эксплантатах ⁽⁶⁾, ни в одном случае не наблюдалось. У контрольных зародышей того же возраста уже начинали образовываться септы, врастающие в полость пузырька.

Результаты опытов эксплантации со стадии 20 материала слухового пузырька вместе с подстилающей его мезодермой и без подстилки, но с прилежащим к нему материалом нервной пластинки — приведены в табл. 2.

Таблица 2

Эксплантированный материал	Осетр			Севрюга		
	изуч. эксплантатов	образовалось слуховых пузырьков		изуч. эксплантатов	образовалось слуховых пузырьков	
		всего	в т. ч. с чувств. пятн.		всего	в т. ч. с чувств. пятн.
Материал слухового пузырька	34	0	—	37	0	—
Материал слухового пузырька + мезодермальная подстилка	39	0	—	33	0	—
Материал слухового пузырька + участок нервной пластинки	42	33(78)	23(70)	25	21(84)	17(81)

В присутствии мезодермальной подстилки слуховые пузырьки в условиях эксплантации не образовались. Напротив, при наличии прилежащего к материалу слухового пузырька участка продолговатого мозга слуховые пузырьки образуются в большем проценте случаев. Это согласуется с полученными ранее данными, показавшими, что у севрюги после удаления на стадиях ранней и средней нейрулы зачатка продолговатого мозга слуховые пузырьки не образуются ⁽¹⁰⁾. В присутствии мозга большинство слуховых пузырьков имеет чувствующие пятна; процент таких пузырьков выше, чем в опытах, где слуховые пузырьки развивались из эпителия, взятого с более поздних стадий, но при отсутствии мозга.

Таким образом, у осетровых рыб в опытах эксплантации нам не удалось обнаружить влияния мезодермальной подстилки на дифференцировку материала слухового пузырька. Индуцирующим действием в этих условиях обладал только продолговатый мозг, тогда как у амфибий при использовании метода трансплантации, по данным ряда авторов ⁽¹¹⁻¹⁸⁾, хордомезодерма, так же как и продолговатый мозг, оказывает индуцирующее действие на материал слухового пузырька. Однако разница в полученных результатах может быть обусловлена различиями в примененных методах исследования. Эти же различия не позволяют пока сравнить процессы латентной дифференцировки у осетровых рыб и амфибий ^(19, 20).

Проведенное в работе сопоставление латентной дифференцировки зачатка слухового пузырька у осетра и севрюги показывает полное сходство их

по всем изученным показателям (стадия, на которой появляется способность к образованию слуховых пузырьков, частота их возникновения, размеры, процент слуховых пузырьков с чувствующими пятнами). Полученные данные говорят в пользу предположения о том, что одной из причин видовых различий в сроках латентной дифференцировки зачатков у родственных видов на одинаковых стадиях развития могут быть сдвиги процессов гастроляции относительно стадий дробления ⁽¹⁾.

Эти данные дают дополнительный материал о существовании корреляции между уровнем латентной дифференцировки и соотношением клеточных поколений на одноименных стадиях развития у родственных видов не только амфибий ⁽¹⁾, но и осетровых рыб.

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова
Академии наук СССР

Поступило
29 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Т. А. Детлаф, ДАН, **111**, 1149 (1956). ² Е. В. Крениг, ДАН, **134**, 984 (1960). ³ H. Sreemann, Zool. Jahrb. Abt. allgem. Zool. u. Phys., **32**, 1 (1912). ⁴ А. С. Гинзбург, ДАН, **54**, 377 (1946). ⁵ А. С. Гинзбург, ДАН, **54**, 561 (1946). ⁶ Г. В. Лопашов, Механизмы развития зачатков глаз в эмбриогенезе позвоночных, Изд. АН СССР, 1960. ⁷ Т. А. Детлаф, А. А. Детлаф, ДАН, **134**, 199 (1960). ⁸ Т. А. Детлаф, А. С. Гинзбург, Зародышевое развитие осетровых рыб (севрюги, осетра и белуги) в связи с вопросами их разведения, М., 1954. ⁹ Е. М. Deuchar, J. Exp. Biol., **30**, № 1 (1953). ¹⁰ А. С. Гинзбург, Т. А. Детлаф, ДАН, **44**, 209 (1944). ¹¹ L. S. Stone, Science, **74**, 577 (1931). ¹² R. J. Harrison, Anat. Rec., **64**, 38 (1935). ¹³ H. G. Albaum, H. A. Nestler, J. Exp. Zool., **75**, 1 (1937). ¹⁴ C. H. Waddington, J. Exp. Biol., **14**, 232 (1937). ¹⁵ Г. П. Горбунова, ДАН, **23**, 298 (1939). ¹⁶ О. И. Шмальгаузен, ДАН, **28**, 276 (1940). ¹⁷ E. Zwilling, J. Exp. Zool., **86**, 333 (1941). ¹⁸ Р. Е. Коган, ДАН, **45**, 42 (1944). ¹⁹ А. С. Гинзбург, ДАН, **72**, 1195 (1950). ²⁰ А. С. Гинзбург, ДАН, **73**, 229 (1950).

С. М. ВЕРЕЩАГИН, И. А. СЫТИНСКИЙ и В. П. ТЫЩЕНКО

**ДЕЙСТВИЕ БЕТА-ОКСИ-ГАММА-АМИНОМАСЛЯНОЙ КИСЛОТЫ
НА БИОЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ АКТИВНОСТЬ ГАНГЛИЕВ
ИЗОЛИРОВАННОЙ НЕРВНОЙ ЦЕПОЧКИ ЧЕШУЕКРЫЛЫХ**

(Представлено академиком В. Н. Черниговским 9 I 1961)

Впервые Хояши (¹) показал, что β -окси- γ -аминомасляная кислота (БОГАМК) вызывает сильный депрессивный эффект при судорогах у собак при прямом ее воздействии на моторную область коры или при введении в кровь. Впоследствии было установлено наличие БОГАМК в мозгу и ее биосинтез из γ -аминомасляной кислоты (ГАМК) в мозговой ткани (²⁻⁶). Хояши (^{7, 8}) считает БОГАМК тормозящим агентом в центральной нервной системе, который обладает большей активностью, чем ГАМК. В нервной системе беспозвоночных БОГАМК не обнаружена. Не изучены также ответные реакции нервной цепочки беспозвоночных на ее воздействие.

В настоящем сообщении представлены данные о влиянии БОГАМК * на биоэлектрическую активность ганглиев двух видов чешуекрылых.

Методика. Опыты проводились на гусеницах и бабочках *Dasychira pudibunda* L. (сухумская форма) и бабочках *Gastropacha quercifolia* L. (белгородская форма). Гусеницы обоих видов содержались при температуре 25° и при длине дня, соответственно, 10 и 12 час. Изолированная нервная цепочка без подглоточного и надглоточного ганглиев помещалась в ванночку с физиологическим раствором для насекомых (⁹). Один электрод располагался на ганглии, другой — на коннективе. Для отведения потенциалов использовались вольфрамовые электроды от 10 до 20 μ . Межелектродное расстояние равнялось 1 — 5 мм. Потенциалы действия регистрировались шлейфным осциллографом типа МПО-2 с усилителем переменного тока УБП-1—01. Частота пропускания от 1 до 10000 гц, чувствительность усилителя позволяла регистрировать при предельном усилении потенциалы не ниже 100 μ В.

Для работы применялись вещества, растворенные в физиологическом растворе для насекомых, следующей концентрации: БОГАМК 0,025 М, ГАМК 0,01 М и пикротоксин 0,05 М. Эти растворы наносились непосредственно на ганглии изолированной нервной цепочки.

Результаты. При непосредственном действии раствора БОГАМК на нервную цепочку гусеницы и бабочки *D. pudibunda* происходит резкое угнетение биоэлектрической активности грудных и брюшных ганглиев (рис. 1 А, 2, Б, 2). Воздействие пикротоксина на этом фоне не вызывало изменений в электрической активности ганглиев (рис. 1 А, 3, Б, 3). Однако прямое воздействие одного лишь пикротоксина на нервную цепочку вызывает усиление ее биоэлектрической активности (рис. 1 В, 2). Действие ГАМК проявилось в угнетении этой активности (рис. 1 В, 3).

Иная картина наблюдается при действии БОГАМК на изолированную нервную цепочку бабочки *G. quercifolia*. Воздействие БОГАМК приводит к незначительному изменению в биоэлектрической активности нервных ганг-

* За любезное предоставление нам препарата β -окси- γ -аминомасляной кислоты приносим глубокую благодарность проф. Т. Хояши (Япония, Токио).

тив (рис. 2 А, 2). Последующее действие пикротоксина резко усиливает биоэлектрическую активность (рис. 2 А, 3). Раствор ГАМК, как и в опытах

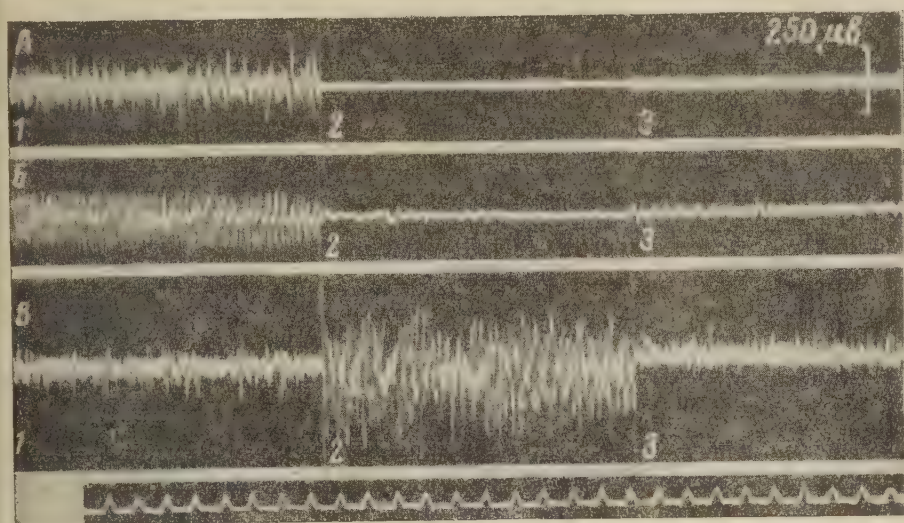


Рис. 1. Влияние β -окси- γ -аминомасляной кислоты на биоэлектрическую активность нервных ганглиев гусениц и бабочек *D. pudibunda* L. А — бабочка, третий грудной ганглий: 1 — норма, 2 — после воздействия БОГАМК, 3 — после воздействия пикротоксина. Б — гусеница, третий брюшной ганглий: 1 — норма, 2 — после воздействия БОГАМК, 3 — после воздействия пикротоксина. В — гусеница, третий брюшной ганглий: 1 — норма, 2 — после воздействия пикротоксина, 3 — после воздействия ГАМК. Отметка времени 0,05 сек.

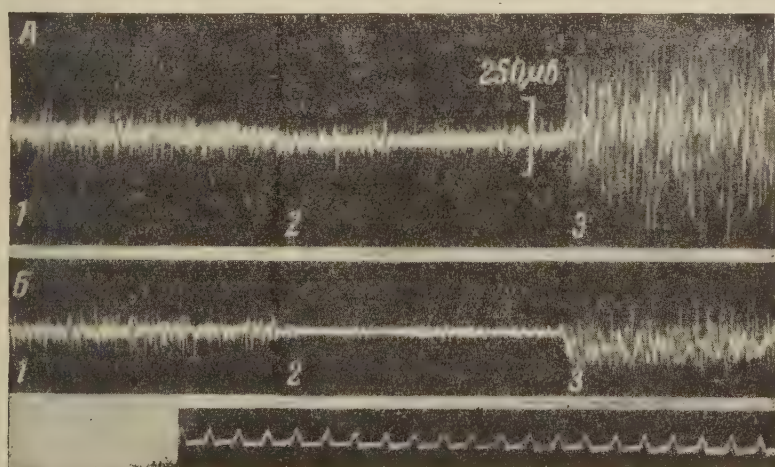


Рис. 2. Влияние β -окси- γ -аминомасляной кислоты на биоэлектрическую активность нервных ганглиев бабочек *G. quercifolia* L. А — второй грудной ганглий: 1 — норма, 2 — после воздействия БОГАМК, 3 — после воздействия пикротоксина. Б — третий грудной ганглий: 1 — норма, 2 — после воздействия ГАМК, 3 — после воздействия пикротоксина. Отметка времени 0,05 сек.

D. pudibunda, вызывает эффект угнетения (рис. 2, Б, 2), который снимается под влиянием пикротоксина (Б, 3).

Представленные выше результаты позволяют заключить, что БОГАМК оказывает различное влияние на биоэлектрическую активность нервных

ганглиев бабочек *D. pudibunda* и *G. quercifolia*. При прямом действии на нервную цепочку *D. pudibunda* БОГАМК вызывает эффект торможения ее биоэлектрических процессов; последующее воздействие пикротоксина вызывающее в обычных условиях возбуждение нервных элементов, не приводит к восстановлению биоэлектрической активности до исходного уровня. Сравнение эффектов воздействия БОГАМК и ГАМК показывает, что первое вещество оказывает более глубокое депрессивное воздействие на биоэлектрическую деятельность. Следует также отметить, что пикротоксин полностью снимает действие ГАМК.

БОГАМК почти не изменяет потенциалы действия нервных ганглиев *G. quercifolia*. Но действие пикротоксина на этом фоне дает более выраженный эффект возбуждения, чем действие его на нервную цепочку, не обработанную БОГАМК.

Таким образом, действие БОГАМК на нервную цепочку двух исследованных видов чешуекрылых оказывается специфичным. Поскольку БОГАМК оказывает одинаковое действие на нервную систему гусениц и бабочек *D. pudibunda*, то можно считать, что этот эффект связан с физиологическими особенностями вида, а не с определенной стадией развития животного. По всей вероятности, обнаруженная специфичность ответных реакций нервных ганглиев обоих этих видов на действие примененных химических агентов обусловлена их экологическими особенностями, которые связаны с определенным типом обмена веществ.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
5 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. Hayashi, K. Nagai, Abstr. Commun. XX Intern. Physiol. Congr., 1956, p. 410. ² K. Ohara, J. Japan. Biochem. Soc., 30, 981 (1958). ³ K. Inoue, J. Japan. Biochem. Soc., 31, 127 (1959). ⁴ K. Inoue, J. Japan. Biochem. Soc., 32, 12 (1960). ⁵ T. Hayashi, Nature, 182, 1076 (1958). ⁶ K. Ohara, J. I. Sano et al. Science, 129, 1225 (1959). ⁷ T. Hayashi, J. Physiol., 145, 570 (1959). ⁸ Т. Хояши, К. Нагаи, Сборн. Некоторые вопросы современной физиологии, .., 1959, стр. 211. ⁹ C. M. Williams, The Biol. Bull., 90, 234 (1946).

А. В. ЗЕВЕКЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНОРЕЦЕПЦИИ ЛЕГКИХ МЕТОДОМ АНТИДРОМНОГО ПОДАВЛЕНИЯ АФФЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ

(Представлено академиком В. Н. Черниговским 30 XII 1960)

Исследованиями ряда авторов (¹⁻⁶) установлено наличие в легких механорецепторов, возбуждающихся во время вдоха и обеспечивающих саморегуляцию дыхания. Сигналы от этих рецепторов проводятся по чувствительным волокнам блуждающих нервов, принадлежащим к группе А. Примененная в упомянутых исследованиях методика отведения потенциала от одиночных афферентных волокон не позволяет, однако, характеризовать изменения суммарной активности всего рецепторного аппарата легких в зависимости от фаз дыхательного цикла. Кроме того, остается неразрешенным вопрос о функции рецепторов легких, связанных с наиболее тонкими (чувствительными волокнами группы С), наличие которых установлено гистологически.

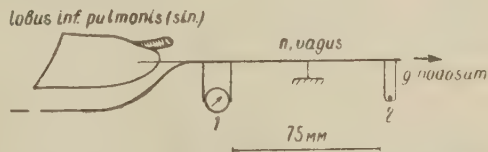


Рис. 1. Схема расположения электродов на блуждающем нерве: 1 — регистрирующие, 2 — раздражающие электроды

Оба поставленных вопроса в принципе могут быть решены при помощи методики изучения сигнализации от рецепторов в целом (нерасщепленном) нервном стволе, предложенной Дагласом и Ритчи (⁷).

Относительная новизна этой методики обязала нас подвергнуть ее экспериментальной проверке путем исследования сигнализации рецепторов, проводящейся по волокнам группы А блуждающего нерва.

Методика опытов. У обездвиженных прокураном кошек, дыхание которых поддерживалось специальным аппаратом (⁸), производилась торакотомия и удаление верхней доли левого легкого. Левый блуждающий нерв перерезался тотчас проксимальнее узелкового ганглия и над диафрагмой.

Последнее, как показали опыты, необходимо для исключения импульсов от рецепторов органов брюшной полости.

Раздражение блуждающего нерва в его шейном отделе осуществлялось прямоугольными импульсами электрического тока, длительностью 2 мсек., частотой 15—20 гц и напряжением от 1 до 2 в. Вторая пара платиновых электродов накладывалась на отпрепарированный участок грудного отдела блуждающего нерва и через предусилитель (полоса пропускания от 0 до 50 кГц) соединялась с осциллографом ЭНО-1 (рис. 1). Регистрация биопотенциалов с экрана осциллографа производилась киноаппаратом. Искусственное дыхание регистрировалось пневматическими капсулами при помощи системы зеркал, отбрасывающих световой луч на экран осциллографа. Соппротивление воздухоносных путей, зависящее от тонуса гладкой мускулатуры легких, регистрировалось водяным манометром (⁹), соединенным с воздушной системой аппарата искусственного дыхания. Температура тела животных поддерживалась равной 38,5—39° при помощи подогрева

от термостата. Температура воздуха, поступающего в легкие из аппарата искусственного дыхания, поддерживалась на уровне 35° .

Результаты опытов. Потенциалы волокон группы А блуждающего нерва, вызванные электрическим раздражением его шейного отдела и регистрируемые в грудном отделе, имеют у разных животных неодинаковую форму (рис. 2). Характерно, однако, что в ритм с искусственным дыханием (т. е. с растяжением легких) меняется, как правило, лишь один из

компонентов потенциала волокон А. Согласно Дагласу и Ритчи⁽⁷⁾, это объясняется следующим образом.

При растяжении легких во время вдоха происходит раздражение механорецепторов, и в части волокон блуждающего нерва возникают ортодромно проводящие импульсы. В то же время во всех волокнах группы А в антидромном направлении (т. е. к рецепторам) проводятся импульсы от места раздражения нерва электрическим током. В каком-то участке нервного волокна между отводящими и раздражающими электродами происходит «столкновение» бегущих навстречу орто- и антидромных импульсов. Вследствие рефрактерности, следующей за возбуждением волокна, к регистрирующим электродам прибывает, следовательно, только часть искусственно вызванных импульсов, прошедших по волокнам, свободным от ортодромного сигнала с рецепторов*. Очевидно, таким образом, что чем бол

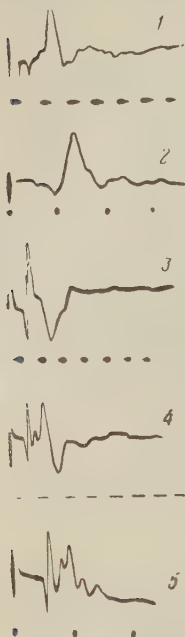
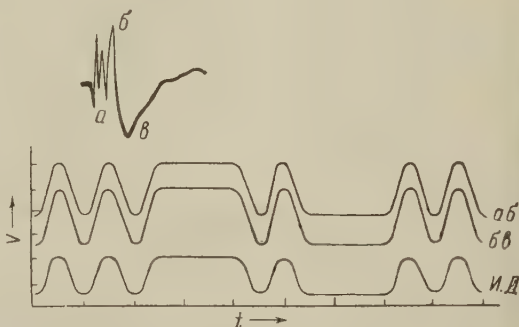


Рис. 2. Формы потенциала А блуждающего нерва в опытах на пяти различных животных. Отметка времени 2 мсек. Расположение раздражающих и отводящих электродов, как на рис. 1

шее количество волокон на участке нерва между раздражающими и отводящими электродами будет «занято» ортодромными импульсами, тем меньшее число волокон будет участвовать в генерации биотока у отводящих электродов и тем меньше будет его амплитуда.

Рис. 3. Изменение амплитуды компонентов *аб* и *бв* потенциала А блуждающего нерва соответственно фазам дыхательного цикла (в условных единицах). Остальные компоненты потенциала не изменяются. И. Д.— фазы искусственного дыхания (вниз— вдох); *аб* и *бв* — амплитуда изменяющейся части потенциала. Отметка времени — в секундах



Когда легкие находятся в спавшемся состоянии, механорецепторы не раздражаются, и афферентные волокна не проводят импульсы возбуждения. В это время искусственно вызванные импульсы проходят до регистрирующих электродов по всем волокнам блуждающего нерва и амплитуда потенциала оказывается максимальной. При растяжении легких воздушная амплитуда потенциала уменьшается. Естественно, что уменьшаться должна лишь та часть потенциала, который имеет отношение к рецепторам легких. Это происходило и в наших опытах. Так, в опыте, представленном

* Импульсы от рецепторов не регистрируются из-за недостаточного усиления.

ном на рис. 3, с фазами дыхания изменялась амплитуда компонентов потенциала, обозначенных буквами *аб* и *бв*. Как видно из рис. 3, при вдохе амплитуда этих компонентов уменьшается, а при выдохе вновь увеличивается. При остановке искусственного дыхания в положении полного вдоха или полного выдоха фазные изменения амплитуды компонентов *аб* и *бв* пропадают. Их амплитуда становится максимальной в положении полного выдоха и минимальной — в положении полного вдоха.

При наложении осциллограмм, снятых при полном вдохе и при полном выдохе, отчетливо видны границы изменяющихся участков потенциала, по которым легко определить скорость проведения возбуждения для афферентных волокон от механорецепторов легких. Из табл. 1 следует, что скорости проведения возбуждения как всех волокон группы А, так и афферентных волокон от механорецепторов легких у отдельных животных варьируют. В литературе (4) также имеются данные о том, что скорость проведения возбуждения по волокнам группы А блуждающего нерва у различных животных не одинакова. По-видимому, это зависит от разной толщины осе-

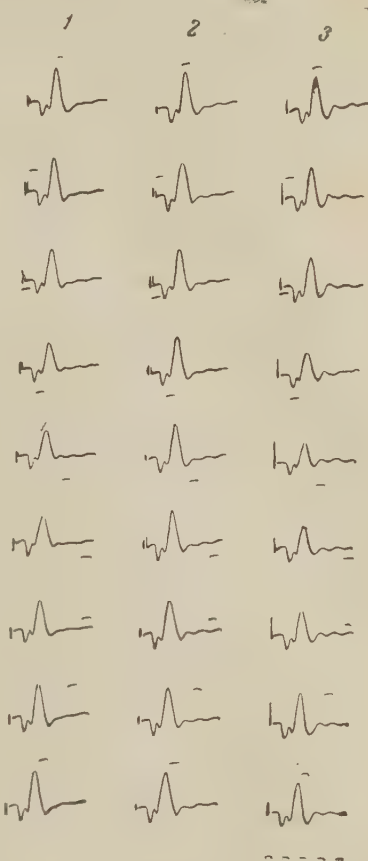


Рис. 4. Изменение потенциала А за один дыхательный цикл в нормальных условиях (1), при прозеринном бронхоспазме (2) и после снятия бронхоспазма атропином (3). Перемещение отметки вокруг биопотенциала соответствует фазе дыхания; вокруг влево вниз — вдох, вправо вверх — выдох. Отметка времени 2 мсек.

вых цилиндров волокон и разной степени их миелинизации у отдельных животных, а также от изменения толщины осевого цилиндра и степени миелинизации волокон по мере удаления их от центральной нервной системы (10).

Для дальнейшего доказательства зависимости уменьшения амплитуды потенциала от возбуждения механорецепторов легких были проведены опыты с воздействием на тонус гладкой мускулатуры бронхов. С этой целью животным внутривенно вводился прозерин (в дозе 0,3 мг/кг), вызывающий сильный бронхоспазм. Как видно из рис. 4, 1, до введения прозерина амплитуда максимального в данном опыте компонента потенциала А во время цикла выдох — вдох — выдох изменяется уже описанным выше образом. После введения прозерина поступление воздуха в альвеолы прекращается, легкие перестают растягиваться, и, как можно судить по рис. 4, 2, амплитуда потенциала не изменяется. Это, очевидно, связано с прекращением деформации и возбуждения механорецепторов. Действительно, ликвидация бронхоспазм атропином (0,03 мг/кг) восстанавливает экскурсию легких и вместе с тем подавление амплитуды потенциала. Интересно, что уменьшение амплитуды потенциала при вдохе после введения атропина становилось больше, чем в норме (рис. 4, 3).

Эти наблюдения показывают, что на афферентную импульсацию механорецепторов легких влияет тонус гладкой мускулатуры. Чем меньше тонус

Скорости проведения возбуждения в волокнах группы А блуждающего нерва

№ опыта	Скорость проведения всех волокон группы А, м/сек		Скорость проведения волокон от механорецепторов легких		Расстояние, мм	
	макс.	мин.	макс.	мин.	между полюсами регистр. электр.	между регистр. и раздр. электр.
1	74,8	11,3	33,5	18,7	8	83
2	71,4	20,1	30,0	23,0	12	75
3	67,5	15,8	31,1	20,2	8,5	81
4	48,3	12,8	20,2	15,6	13	58
5	62,3	14,3	31,0	15,3	8	72
6	53,0	15,8	30,6	18,5	11	78
7	59,0	12,4	23,2	16,2	15	68
8	71,4	16,9	30,8	28,4	7,5	73
Средн.	68,5±3,4	14,9±1	28,8±1,6	19,5±1,5		

гладкой мускулатуры, тем более податливы легкие к растяжению, тем большее число механорецепторов подвергается раздражению. Поскольку уменьшение амплитуды потенциала зависит от степени наполнения легких воздухом, можно полагать, что это связано с увеличением числа «занятых» афферентных волокон, т. е. с увеличением количества механорецепторов, возбуждающихся в течение вдоха. Центральная нервная система получает сигнализацию о степени наполнения легких не только путем увеличения частоты импульсов от отдельных рецепторов (¹), но и по возрастающему количеству афферентных волокон.

Проведенные опыты показали, что методика, предложенная Дагласом и Ритчи, применима для исследования рецепторной функции. Поскольку эта методика не требует расщепления нерва, она позволяет изучать информацию, передаваемую с рецепторного поля в целом. В этом, в частности, можно усмотреть причину некоторого расхождения измеренной нами скорости проведения в волокнах от рецепторов легких (табл. 1) с цифрами, полученными при статистической обработке результатов измерений на одиночных волокнах (⁴, ⁵).

Автор приносит благодарность В. М. Хаютину за консультацию при выполнении данной работы.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
13 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. D. Adrian, J. Physiol., 79, 332 (1933). ² G. C. Knowlton, M. G. Larrabee, Am. J. Physiol., 147, 100 (1946). ³ J. G. Widdicombe, J. Physiol., 123, 71 (1954). ⁴ A. S. Paintal, J. Physiol., 121, 341 (1953). ⁵ A. S. Paintal, Quart. J. Exptl. Physiol., 42, 56 (1957). ⁶ J. G. Widdicombe, J. Physiol., 125, 336 (1954). ⁷ W. W. Douglas, J. M. Ritchie, J. Physiol., 138, 19 (1957). ⁸ А. В. Зевеке, Бюлл. эксп. биол. и мед., 38, № 8, 72 (1954). ⁹ Л. Г. Магазаник, В сборн. Физиологическая роль ацетилхолина, Л., 1957. ¹⁰ A. Iggo, J. Physiol., 142, 110 (1958.)

В. А. ИЛЬЯНОК

**ОБ АКТИВИРУЮЩЕМ ВЛИЯНИИ НЕПРЕРЫВНОГО СВЕТА
НА ПОСЛЕДУЮЩЕЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ МОЗГОМ ЧЕЛОВЕКА
РИТМА СВЕТОВЫХ МЕЛЬКАНИЙ**

(Представлено академиком В. Н. Черниговским 27 XII 1960)

Эффект усиления электрической активности сетчатки после выключения непрерывного света обнаружен Вальцевым ⁽¹⁾ на изолированном глазе лягушки. Он заключается в том, что после предварительного освещения глаза таким светом величина волны a и d возрастает в ритмической электроретинограмме на длительное время. Чангом ⁽²⁾ установлено, что латентные периоды и число импульсов позднего ответа одиночного тектального нейрона жабы изменяются после такого раздражения.

Это дало основание предположить, что и суммарная электрическая активность мозга человека — электроэнцефалограмма (ЭЭГ) — также может изменяться после выключения непрерывного света.

Исследование этого вопроса явилось задачей настоящей работы.

Влияние непрерывного света на последующее изменение суммарной электрической активности мозга оценивалось по величине амплитуд воспроизводимых мозгом человека частот световых мельканий.

Исследуемый находился в полулежачем положении в темной экранированной камере. Регистрировалась ЭЭГ от затылочной области мозга при униполярном отведении. После 3 — 5 мин. темновой адаптации на экран, видимый под углом 95°, давался ритмический свет при отношении длительности света к темноте 1 : 1. Бралась частота мельканий от 4 до 60 в 1 сек. при освещенности на зрачке от 0,4 до 50 лк. В половине случаев через 1 — 2 мин. после начала ритмического раздражения на этот же экран от дополнительного осветителя добавлялся непрерывный свет — подсветка. В другой половине случаев через несколько минут после выключения одного ритмического раздражителя давался непрерывный свет, а ритмическое раздражение включалось одновременно с его выключением. Длительность непрерывного света варьировалась от 1 сек. до 5 мин., а его освещенность на зрачке — от 0,08 до 250 лк.

Было исследовано 20 человек в возрасте от 18 до 30 лет.

Для определения амплитуд воспроизводимых мозгом частот был применен гармонический анализатор Уолтера, у которого часть фильтров была настроена нами для выделения из ЭЭГ колебаний высоких частот ⁽³⁾.

Обработка результатов велась по усредненным за 10 и 50 сек. данным анализатора, а ЭЭГ служила показателем отсутствия артефактов, искажающих частотный спектр. Кроме того, исследуемая частота с фильтра анализатора подавалась на один из каналов энцефалографа и записывалась параллельно с ЭЭГ. По такой записи мы судили об изменении амплитуды выделенной частоты в любое время действия раздражителя.

Результаты наших опытов показали, что после выключения непрерывного света амплитуды воспроизводимых мозгом частот у многих исследуемых * возрастали * (рис. 1).

* Изменения амплитуд усвоенных ритмов во время сочетания ритмического светового раздражителя с непрерывным светом описаны нами в работе ⁽⁴⁾.

Выраженность и продолжительность этого эффекта оказались обусловленными частотой и яркостью ритмического света, яркостью и длительностью непрерывного света и индивидуальными особенностями мозга испытуемых.

Возрастание амплитуд воспроизводимых мозгом частот ритмического света — их активация — было выражено лучше всего на средних и высоких частотах — от 20 до 60 гц. На частотах α -ритма (9—12 в 1 сек.) подъем амплитуд был обнаружен лишь у некоторых исследуемых. У всех испытуемых на самых низких частотах (4 — 6 гц) амплитуды воспроизводимых мозгом

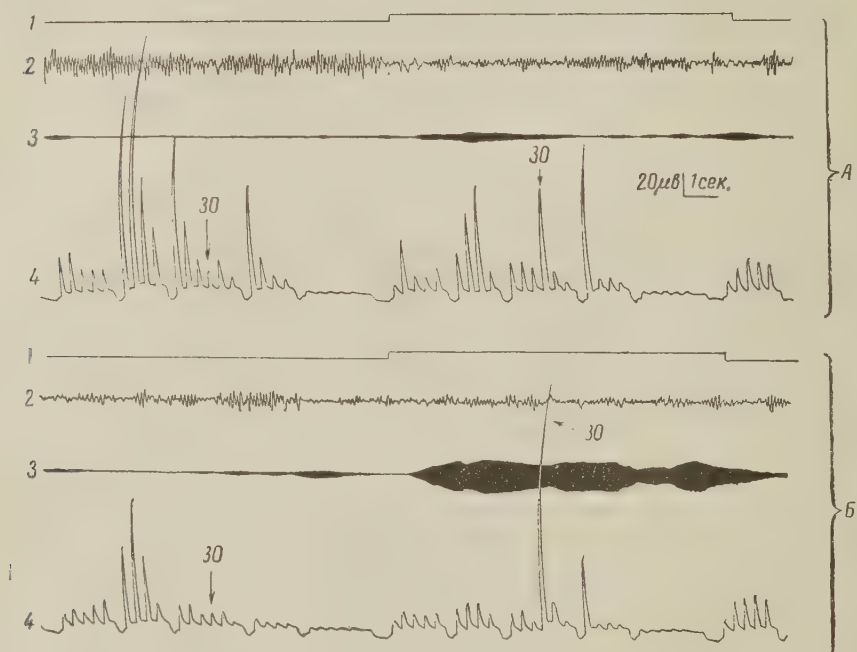


Рис. 1. Зависимость амплитуды воспроизводимой мозгом частоты от предварительного действия непрерывного света. А — воспроизведение ритма световых всплесков (30 гц — 2 лк) после нескольких минут темновой адаптации; Б — то же после подсветки 50 лк, длившейся 2 мин. 1 — отметка мелькающего света; 2 — ЭЭГ; 3 — частота потенциалов 30 в сек., выделенная из ЭЭГ фильтром анализатора; 4 — запись пера анализатора. Высота пиков отражает усредненные за 10 сек. амплитуды отдельных частот ЭЭГ. Исследуемая Т. С. 10 XII 1960 г. Видно резкое повышение амплитуды воспроизводимой частоты после выключения подсветки

ритмов не только не повышались после выключения подсветок любых интенсивностей, но в некоторых случаях даже снижались.

Явление активации наблюдалось в условиях нашего опыта при средних яркостях ритмического раздражителя (0,4—10 лк на зрачке). При высоких и очень малых яркостях мелькающего света активация была выражена слабо или не возникала.

Как указывалось, величина и продолжительность повышения амплитуд воспроизводимых мозгом частот определялись интенсивностью и длительностью действия непрерывного света.

Этот эффект был выражен тем сильнее и продолжительнее, чем больше (до определенного предела) яркость непрерывного света превышала яркость ритмического раздражителя. Когда же его яркость была меньше яркости мелькающего света, активация обычно не наблюдалась. Обнаружена прямая зависимость возрастания амплитуд воспроизводимых мозгом частот от интенсивности предшествующей подсветки (рис. 2 А).

Следует отметить, что у некоторых испытуемых освещенность на зрачке 50—250 лк, создаваемая непрерывным светом, оказывалась сверхсильной. Она вызывала противоположный эффект — снижение амплитуд усвоенных ритмов, особенно резко выраженное сразу же после выключения подсветки. В этих случаях на протяжении последующих 30—50 сек. амплитуды возрастали и приближались к фоновой (до подсветки) величине.

Степень активации воспроизводимых мозгом частот, так же как это было установлено Вальцевым (¹) для ретинограммы изолированного глаза лягушки, находится в прямой зависимости от продолжительности непрерывного света (рис. 2 Б). Даже очень яркий свет, даваемый в течение 1 сек., обычно не вызывал после себя повышения амплитуд усвоенных ритмов. По мере

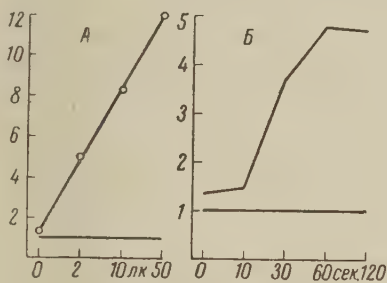


Рис. 2

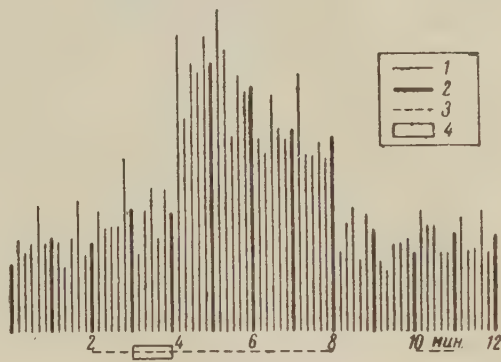


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость эффекта активации от яркости (А) и длительности (Б) непрерывного света. По оси абсцисс: А — освещенность на зрачке от подсветки, длившейся 60 сек. (исследуемый К. Ю., 29 I 1960 г.); Б — длительность подсветки, создававшей на зрачке освещенность, равную 50 лк (исследуемый А. Э., 12 IX 1960 г.). По оси ординат — отношение амплитуды воспроизводимого мозгом ритма световых вспышек (30 гц при освещенности на зрачке: А — 0,4 лк; Б — 2 лк) к ее фоновой величине в темноте, принятой за единицу. Кривые построены по данным анализатора за первые 10 сек. после выключения подсветок

Рис. 3. Динамика изменения амплитуды потенциалов с частотой 30 гц в темноте и при световых мельканиях этой же частоты до, во время и после выключения подсветки. 1 — отклонение пера анализатора, отражающее амплитуду потенциалов с частотой 30 гц, усредненную за 10 сек.; 2 — то же при усреднении за 50 сек.; 3 — ритмический свет: 30 гц, 2 лк; 4 — непрерывный свет: 50 лк, 60 сек. Исследуемая Л. Н., 29 XII 1959 г.

увеличения длительности действия непрерывным светом эти амплитуды возрастали. Наиболее сильная и продолжительная активация наблюдалась при длительности непрерывного света свыше 60 сек.

Возрастание амплитуд воспроизводимых мозгом частот после выключения непрерывного света у разных исследуемых было неодинаковым. У некоторых из них (9 человек) оно было значительным, у других (6 человек) — относительно невелико, а у 5 — этот эффект вообще не наблюдался. Существенно отметить, что резко выраженная активация возникала у исследуемых, мозг которых давал большую амплитуду воспроизводимых частот без предварительного действия подсветки. Активация была слабой или совсем не наблюдалась у лиц с плохо выраженным усвоением ритмов.

По длительности активация также была различной у разных исследуемых. У некоторых лиц она наблюдалась только в течение нескольких секунд после выключения непрерывного света. У других повышение амплитуд воспроизводимых мозгом частот длилось, постепенно ослабевая, в течение многих минут (рис. 3). Наиболее сильная активация обычно наблюдалась сразу же после выключения непрерывного света — в первые 10—20 сек.

Одновременная регистрация ЭЭГ от затылочных областей обоих полушарий и выделение из них усвоенного ритма двумя одинаковыми фильтрами (от двух анализаторов) показали, что активация может быть неодинаково выражена в разных полушариях мозга человека.

Обнаруженная нами активация амплитуд воспроизводимых мозгом частот ритмического раздражителя после выключения непрерывного света ставит вопрос о связи этого явления с изменением возбудимости определенных структур мозга. Как указывалось, величина и продолжительность активации в известных пределах определяются яркостью и длительностью подсветки, т. е. количеством световой энергии, действовавшей на глаза перед ритмическим раздражением. Если исходить из того, что от количества этой энергии зависит возбудимость центральных отделов зрительного анализатора человека (⁵⁻⁸), а также из того, что возбудимость центральной нервной системы определяет амплитуды и частотный диапазон воспроизводимых мозгом ритмов (⁹⁻¹¹), то эффект активации можно было бы объяснить как следствие повышения возбудимости мозга человека после действия непрерывного света. Однако мы считаем, что наши исследования не дают достаточных оснований для однозначного решения этого вопроса.

Таким образом, в нашей работе показано, что в суммарной электрической активности мозга человека наблюдается последствие непрерывного света. Оно проявляется в последующих изменениях амплитуд воспроизводимых мозгом средних и высоких частот, объективно отражающих яркость и длительность такого раздражителя.

Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии
Академии наук СССР
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Б. Вальцев, ДАН, 135, № 2, 493 (1960). ² Chang Hsiang-tung, Chiang Chen-uy, Wu Chien-ping, Scientia Sinica, 8, № 10, 1132 (1959). ³ В. А. Ильянок, Биофизика, 5, в. 4, 488 (1960). ⁴ В. А. Ильянок, Биофизика, 6, в. 1, 68 (1961). ⁵ А. В. Лебединский, Природа, № 9, 36 (1935). ⁶ А. В. Лебединский, Усп. совр. биол., 26, 3 (6) (1948). ⁷ В. А. Ильянок, Биофизика, 2, в. 2, 234 (1957). ⁸ В. А. Ильянок, Пробл. физиол. оптики, 12, 303 (1958). ⁹ Р. С. Мнухина, Физиол. журн., 38, 288 (1952). ¹⁰ Г. Н. Сорохтин, О. П. Минут-Сорохтина, Л. В. Турбина, Журн. высш. нервн. деят., 5, в. 5, 447 (1955). ¹¹ А. Г. Копылов, Вопросы теории и практики электроэнцефалографии, Л., 1956, стр. 96.

Академик АН АрмССР [Х. С. КОШТОЯНЦ]

НУКЛЕИНОВЫЕ КИСЛОТЫ И ПРОВЕДЕНИЕ РИТМИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ В СЕРДЦЕ

В нашем предыдущем сообщении мы приводили результаты экспериментов, указывающие на возможное участие нуклеиновых кислот в осуществлении угнетающего влияния раздражения блуждающего нерва и ацетилхолина на ритмические сокращения сердца. Было выяснено, что блокирование нуклеиновых кислот (трипафлавином нейтральным) ведет к блоку угнетающего влияния как раздражения блуждающего нерва, так и ацетилхолина (1).

В настоящем сообщении проводятся результаты опытов, поставленных с целью выяснения роли нуклеиновых кислот в нормальном акте ритмической сократительной активности сердца, складывающейся, как известно, в результате взаимодействия собственно сократительных элементов сердца (миокарда) с теми специфическими элементами сердечной ткани (так называемой центр автоматии и проводящая система сердца), в которых возникают и распространяются ритмические процессы возбуждения.

В литературе накопилось достаточно данных, говорящих о влиянии нуклеиновых кислот и их дериватов на специфическую проводящую ткань сердца, и в частности на ведущий пункт и атриовентрикулярный узел сердца как холонокровных, так и теплокровных, включая сердце человека (2). Следует отметить, что как старые, так и новые работы в этом направлении имеют фармакологический характер и мало касаются вопроса о возможном физиологическом значении нуклеиновых кислот и их дериватов в регуляции ритмической активности сердца.

В своих исследованиях этого вопроса мы исходили из новых данных, говорящих о приуроченности нуклеиновых кислот к поверхностным структурам клеток и внутриклеточных образований (3, 4), о роли нуклеиновых кислот в связывании и транспорте ионов (4, 5), и, наконец, из данных о том, что под влиянием рибонуклеазы, т. е. при расщеплении нуклеиновых кислот, происходит нарушение связывания клетками таких физиологически важных ионов, как ионы кальция (5, 4, 6).

В литературе указывается, что поглощение и связывание ионов связано с синтезом белков, причем анионы и катионы связаны с амфотерными γ-глутамил-пептидами, которые в конечном звене ассоциируют с нуклеиновыми кислотами (4, 5). Из этих и подобных данных следует, что избирательное влияние на нуклеиновые кислоты рибонуклеазы должны повлечь за собой не только нарушение синтеза белка (что хорошо известно), но и нарушение тех связей нуклеиновых кислот, которые поддерживают, в свою очередь, связи ионов со сложными протеидными комплексами и обеспечивают нормальный баланс свободных и связанных ионов и их транспорт. Действительно, было показано, что рибонуклеаза тормозит нормальный уровень поглощения ионов кальция и стронция растительными клетками (3, 6, 7).

При определении экспериментальных методов решения поставленной задачи мы исходили также из данных, указывающих на то, что красители —

толуидиновый синий и нейтральный красный избирательно связывает нуклеиновые кислоты (⁸, ⁹) и что интенсивность прокрашивания толуидиновым синим поверхностных структур (яиц *Agracia*, некоторых растительных клеток) значительно снижается после действия рибонуклеазы, т. е. после расщепления нуклеиновых кислот (³, ⁶).

Опыты производились на изолированном сердце лягушки по методу Штрауба. В каждом опыте производилась отдельная регистрация сокращений предсердий и желудочка.

После установления фоновой картины ритмических сокращений предсердий и желудочка, в сердце через канюлю вводились испытуемые вещества в рингеровском растворе, а именно фермент рибонуклеаза или названные красители. Для контроля состояния возбудимости миокарда в фазы остановки производилось электрическое раздражение желудочка.

Результаты опытов показали, что при действии рибонуклеазы обычно через 2—2,5 часа наступает своеобразный блок передачи возбуждения с предсердий на желудочек. Особенность блока заключается в том, что при продолжающейся нормальной ритмической активности предсердий в активности желудочка наблюдается периодическая смена фаз остановки фазами ритмической активности. Наличие прямой возбудимости желудочка в ответ на электрическое раздражение в фазы остановки желудочка при продолжающейся ритмической активности предсердий ясно указывает на то, что под влиянием рибонуклеазы происходят глубокие изменения в проводящей системе сердца. Наши опыты показали, что при введении в сердце рибонуклеиновой кислоты в начале очередной фазы остановки желудочка снимается эта остановка, т. е. иными словами, снимается блок передачи возбуждения с предсердий на желудочек.

Аналогичные явления были обнаружены также при перфузии сердца раствором толуидинового синего ($1 \cdot 10^{-5}$). При действии этого вещества, связывающегося с нуклеиновыми кислотами, в среднем через 2 часа действия наступает характерная периодическая смена фаз остановки и активности желудочка при продолжающейся ритмической активности предсердий. Фазы остановки желудочка постепенно увеличиваются и могут достигать нескольких минут, и в этом случае в фазе остановки прямая возбудимость желудочка сохраняется. Рибонуклеиновая кислота, вводимая в сердце в фазы длительной остановки желудочка, способна снять блок передачи возбуждения с предсердий на желудочек; в результате многократного введения рибонуклеиновой кислоты фаза остановки желудочка исчезает и восстанавливается ритмическая активность сердца как целого.

Специальная серия опытов была проведена нами с красителем нейтральным красным. Б. В. Кедровский сравнивал свойства ряда испытанных красителей (в том числе толуидинового синего), дающих прижизненное окрашивание, и, характеризуя особенности нейтрального красного, отмечал, что только он один способен к прижизненной реакции с анаболитами, т. е. с соединениями рибозонуклеиновых кислот (⁹), и что нейтральный красный благодаря своей химической структуре может реагировать с внутриклеточными нуклеиновыми кислотами. Кедровский отмечал также, что нейтральный красный благодаря особенностям своей химической структуры, и в частности наличию в нем кольцевой группировки, напоминающей пиперазин, взаимодействует с внутриклеточными нуклеиновыми кислотами наподобие того, как в нормальном процессе обмена веществ происходит реакция взаимодействия между нуклеиновой кислотой и некоторой частью белковой молекулы, в состав которой также входит пиперазин.

Опыты с нейтральным красным показали, что и при действии этого красителя наступает нарушение координированной работы отделов сердца, выражающееся в том, что периодически наступают длительные остановки как предсердий, так и желудочка; при введении РНК удается частично или полностью восстановить нарушенный процесс ритмической активности сердца.

В отличие от толудинового синего, при действии которого наступал типичный блок проведения импульсов к желудочку от продолжающихся сокращаться предсердий, нейтральный красный вызывал остановку и предсердий и желудочка, что свидетельствует о влиянии нейтрального красного не только на проведение ритмического возбуждения в сердце, но и на его формирование в «ведущем пункте» сердца.

Возможно, что указанное различие между физиологическим эффектом действия двух испытанных красителей состоит в том, что нейтральный красный, как мы уже указывали выше, взаимодействует с внутриклеточными нуклеиновыми кислотами, а толудиновый синий — с нуклеиновыми кислотами поверхностных структур.

Приведенные данные ясно указывают на то, что расщепление нуклеиновых кислот под влиянием рибонуклеазы или связывание нуклеиновых кислот химическими агентами (толудиновым синим и нейтральным красным) приводит к блоку передачи возбуждения в сердце, т. е. что действие испытанных веществ проявляется в нарушении функции проводящей системы сердца. Э и данные ясно указывают на то, что нормальное состояние и баланс нуклеиновых кислот в проводящей системе является необходимым условием проведения ритмической импульсации от места возникновения импульсов («ведущий пункт» в правом предсердии) к желудочку сердца.

Мы пока ничего не можем сказать о способе участия нуклеиновых кислот проводящей системы сердца в процессе передачи ритмического возбуждения (ритмических импульсов). Ясно лишь то, что при действии веществ, нарушающих их целостность, нарушается и проведение возбуждения.

Для окончательного суждения о способе и путях влияния испытанных нами красителей, а также рибонуклеазы на процессы проведения возбуждения в сердце мы должны иметь в виду иные, чем те, которые мы предполагали, способы действия и названных красителей, и рибонуклеазы. Так, например, из литературы известно, что рибонуклеаза может не только действовать на нуклеиновые кислоты поверхностных структур, но также и проникать внутрь клетки (¹⁰, ¹¹) и что действие этого энзима объясняется не только влиянием на нуклеиновые кислоты, но также тормозящим действием на окислительное фосфорилирование, необходимое, в свою очередь, для синтеза нуклеиновых кислот (¹², ¹³).

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова
Академии наук СССР

Поступило
21 II 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ X. С. Коштоянц, ДАН, **120**, 926 (1958). ² A. N. Druy, *Physiol. Rev.*, **16**, 292 (1936). ³ T. B. Rosenthal, *J. Cell. and Comp. Physiol.*, **40**, 337 (1952). ⁴ I. F. Sutcliffe, *Biol. Rev.*, **34**, 159 (1959). ⁵ F. C. Steward, F. K. Millar, *Sympos. Soc. Exp. Biol.*, **8**, 367 (1954). ⁶ T. Tanada, *Plant physiol.*, **31**, 251 (1956). ⁷ T. Tanada, *Plant physiol.*, **30**, 211 (1955). ⁸ J. M. Heller, M. I. Корас, *Exp. Cell. Res.*, **8**, 62 (1955). ⁹ В. А. Шолохов, Б. В. Кедровский, ДАН, **69**, 1095 (1954). ¹⁰ J. Brachet, *Nature*, **174**, 876 (1954). ¹¹ B. Kaufman, N. K. Das, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **40**, 1052 (1954). ¹² C. Allard, G. de. Lamirande, A. Cantero, *Biochim. et Biophys. Acta*, **18**, 578 (1955). ¹³ L. Ledoux, J. Le Clerc, J. Brachet, *J. Exp. Cell. Res.*, **9**, 338 (1955).

